①

物理学概論第一

第4回

では, 今週の講義...

第 01 回: 力学 ① - 物理量の表現, 単位, 次元

第 02 回: 力学 ② - 質点と運動の表し方

第 03 回: 力学 ③ - 運動の法則

第 04 回: 力学 ④ - 力と運動 I

第 05 回: 力学 ⑤ - 力と運動 II その 1

第 06 回: 力学 ⑥ - 力と運動 II その 2

第 07 回: 力学 ⑦ - 熱仕事と運動エネルギー

第 08 回: 力学 ⑧ - 保存力とポテンシャルエネルギー

第 09 回: 力学 ⑨ - エネルギー保存則

古典力学の王道 - 復習 ②

- 我々の目標: 物体の位置ベクトルを追跡

$$\mathbf{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$$

- そのための武器:

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t) \qquad m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$m\mathbf{g}$

$\mathbf{F} = -\mathbf{f}$

$\mathbf{N}$

$$F = \mu' N$$

- 加速度ベクトルから位置ベクトルを求める

→ 微分の逆, つまり積分が必要になる

微分方程式を解くということ ③

- 結局のところ, 以下の方程式を解けばよい

求めたいのはこのどちらか

微分方程式

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

力も質量も分かっている

→ 1 回積分すれば $\mathbf{v}(t)$ が求まる

→ 2 回積分すれば $\mathbf{r}(t)$ が求まる

運動量と力積の関係 ④

- 運動量の変化は作用した力の力積に等しい

運動量（ベクトル表示）

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

F 一定の場合

$$\mathbf{F}(t_2 - t_1)$$

1 度積分

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,dt = \overbrace{\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1)}^{[\mathbf{p}]_{t_1}^{t_2}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$$

微分方程式を解くということ ③

- 結局のところ, 以下の方程式を解けばよい

求めたいのはこのどちらか

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

微分方程式

力も質量も分かっている

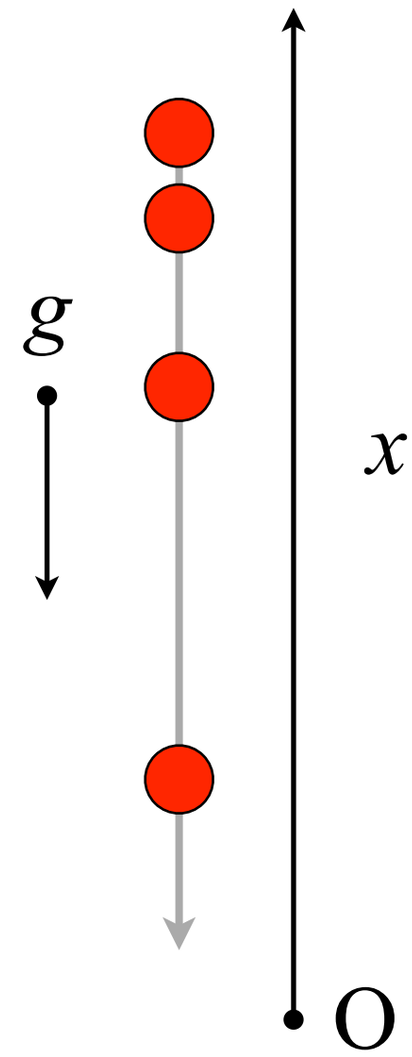
→ 1 回積分すれば $\mathbf{v}(t)$ が求まる

→ 2 回積分すれば $\mathbf{r}(t)$ が求まる

実例をやってみる ⑤

- 質量 m の質点 P を**自由落下**させるとき，
  落下時間 t と質点 P の位置の間の関係は？

まずは運動方程式をたててみる:



実例をやってみる ⑤

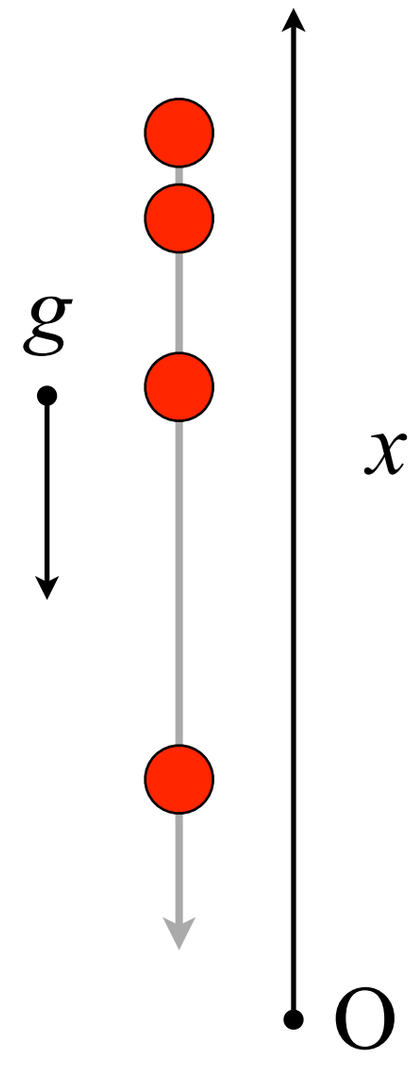
- 質量 m の質点 P を自由落下させるとき，
  落下時間 t と質点 P の位置の間の関係は？

まずは運動方程式をたててみる:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = m\frac{dv(t)}{dt} = -mg$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = -g$$

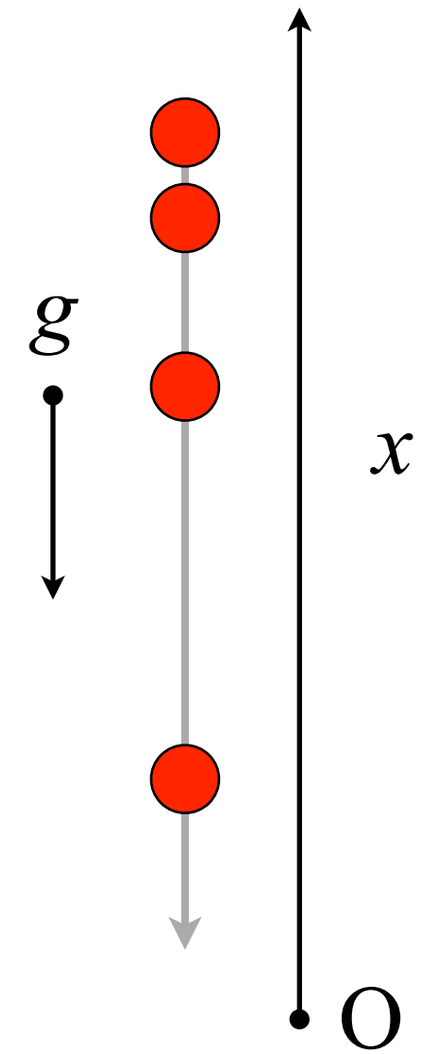
$x\,(t)$ に関する
2 階の微分方程式



積分しましょう ⑥

- 1 回積分すると速度が出る

$$v(t) = \int \frac{dv(t)}{dt} dt = -gt + C \qquad (-g)$$



- もう 1 回積分すると位置が出る

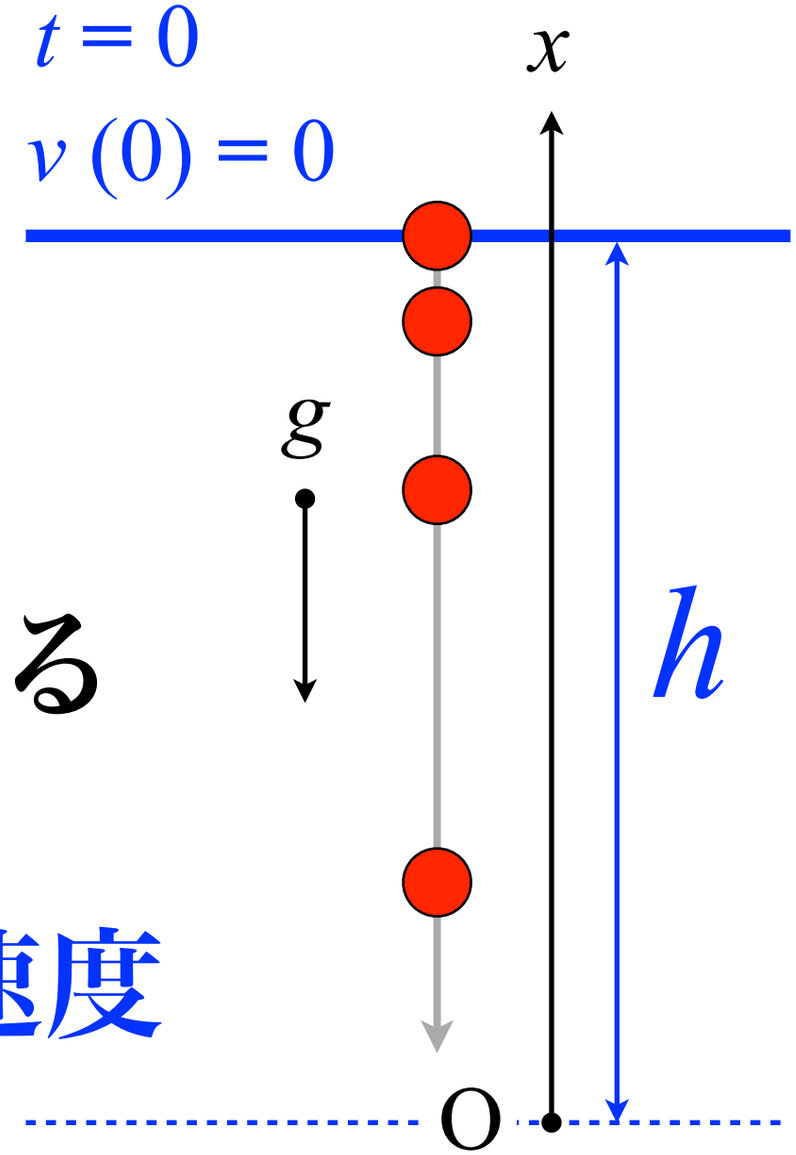
$$x(t) = \int v(t)\,dt = -\frac{1}{2} g t^2 + Ct + D$$

積分定数をどうするか？ ⑦

- 積分定数を含む解を**一般解**と呼ぶ

$$v(t) = \int \frac{dv(t)}{dt} dt = -gt + C$$

$$x(t) = \int v(t) dt = -\frac{1}{2} g t^2 + Ct + D$$



- **初期条件**から積分定数を決める

$t = 0$ での物体の位置とか速度

積分定数をどうするか？ ⑧

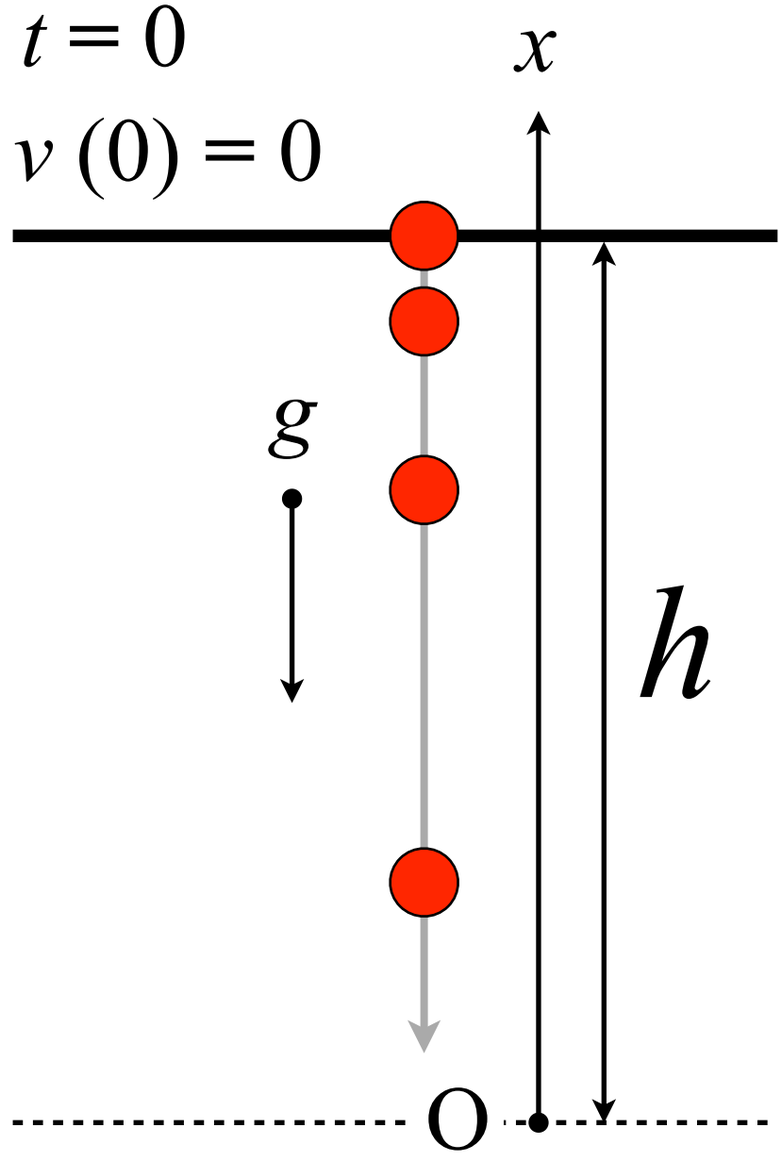
- C を決めてみる → $v(t)$ の**特殊解**が得られる

$$v(t) = \int \frac{dv(t)}{dt} dt = -gt + C$$

$v(0) = 0$ を使うと $C = 0$

$$v(t) = -gt$$

等加速度運動



積分定数をどうするか？ ⑨

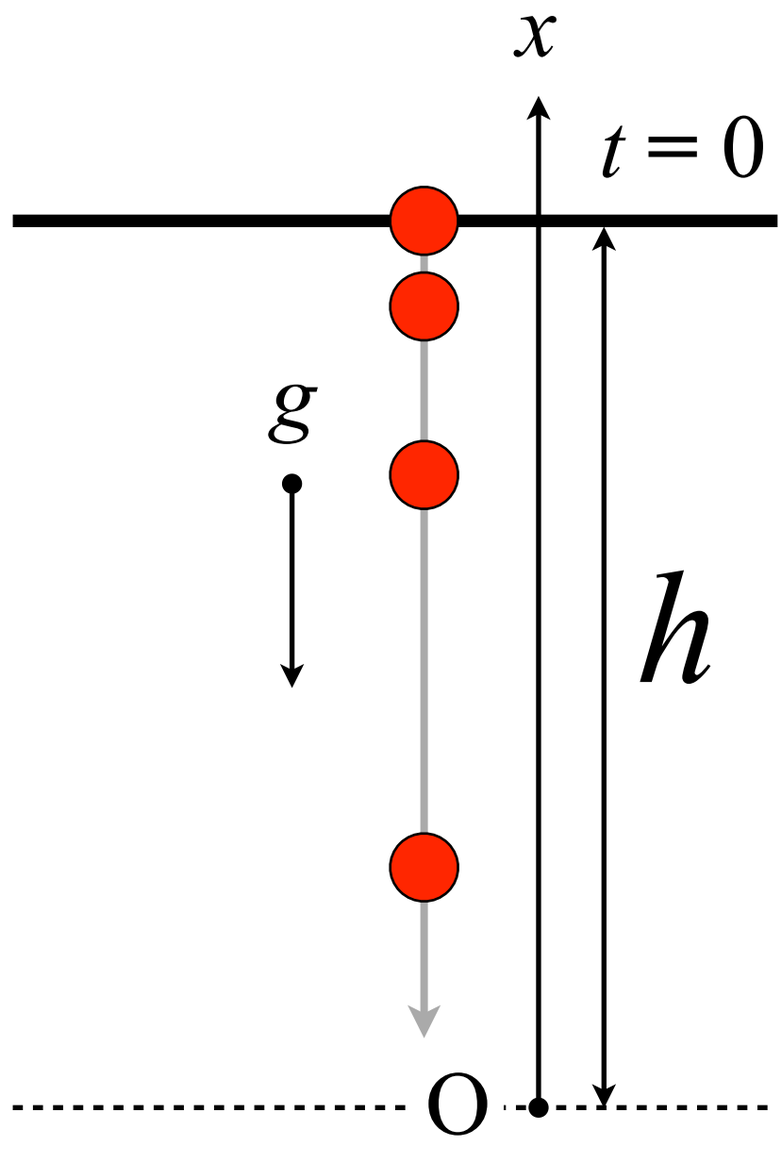
- D を決めてみる → $x(t)$ の**特殊解**が得られる

$$x(t) = \int v(t)\, dt = -\frac{1}{2} g t^2 + Ct + D$$

$C = 0$

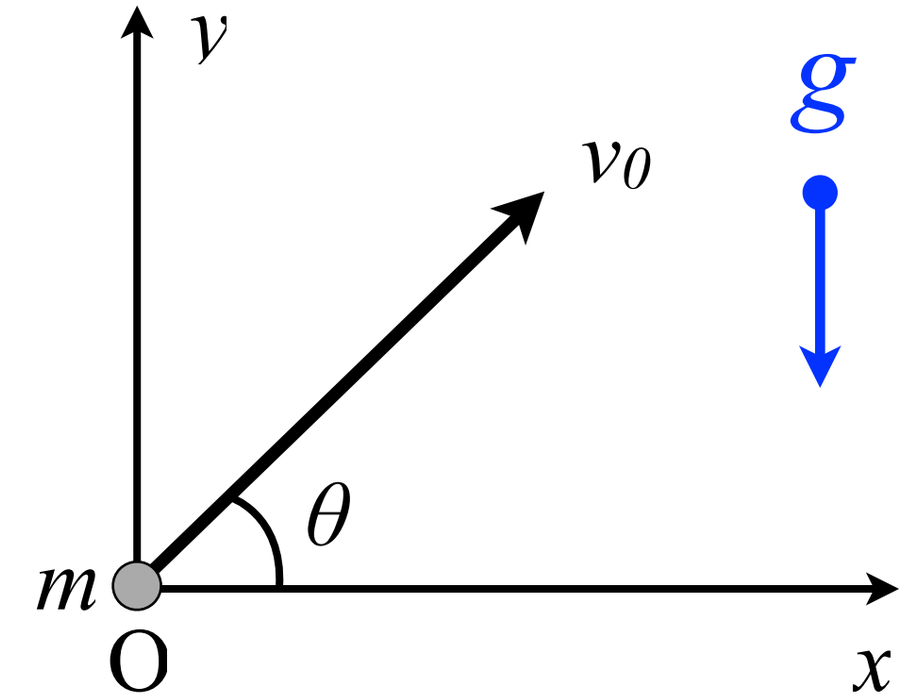
$x\,(0) = h$ を使うと $D = h$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$



確認 - 第一回のミニテスト ⑩

問 **2**. 水平に x 軸，鉛直上向きに y 軸を選び，原点 O の位置から時刻 $t = 0$ で水平面から角度 θ，速さ v_0 で質量 m の質点を投げ上げる．重力加速度の大きさを g，時刻 t での質点の位置の x 成分を $x(t)$，y 成分を $y(t)$ として以下の問題に答えなさい．



問 2-1. 空気抵抗が無視できるとして以下の文章中の空欄に当てはまる数式を解答欄に記入しなさい．

(1)　質点の運動方程式の x 成分，y 成分はそれぞれ

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{\text{2a)}},\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{\text{2b)}}$$

となる．

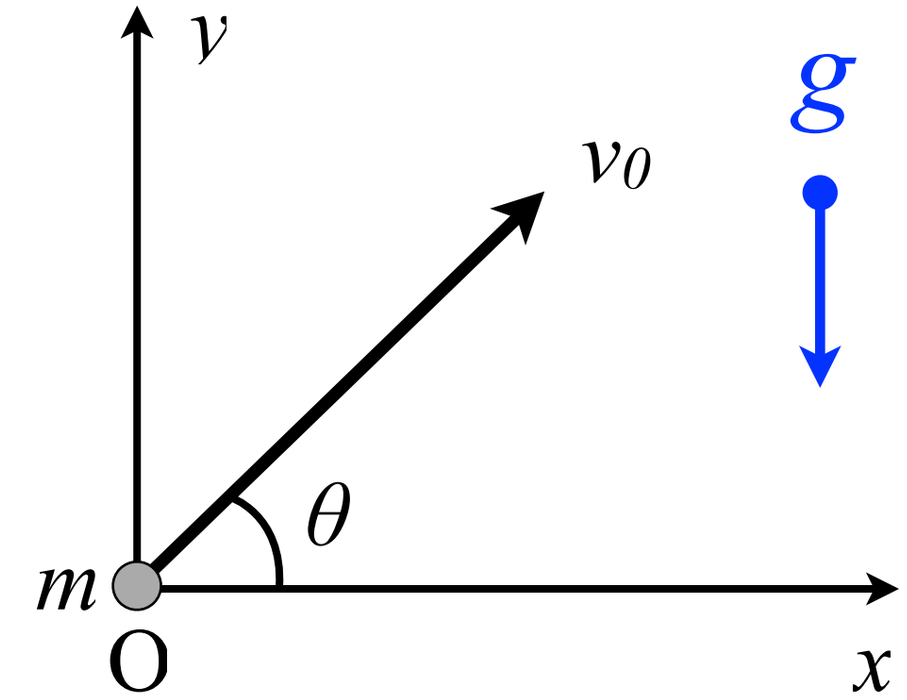
(2)　これら運動方程式を解くと，初期条件より

$$x(t) = \boxed{\text{2c)}},\ y(t) = \boxed{\text{2d)}}$$

を得る．

確認 - 第一回のミニテスト ⑩

問 **2**．水平に x 軸，鉛直上向きに y 軸を選び，原点 O の位置から時刻 $t = 0$ で水平面から角度 θ，速さ v_0 で質量 m の質点を投げ上げる．重力加速度の大きさを g，時刻 t での質点の位置の x 成分を $x(t)$，y 成分を $y(t)$ として以下の問題に答えなさい．



問 2-1．空気抵抗が無視できるとして以下の文章中の空欄に当てはまる数式を解答欄に記入しなさい．

(1)　質点の運動方程式の x 成分，y 成分はそれぞれ

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{\text{2a)}}, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{\text{2b)}}$$

0　　$-mg$

となる．

(2)　これら運動方程式を解くと，初期条件より

$$x(t) = \boxed{\text{2c)}}, \quad y(t) = \boxed{\text{2d)}}$$

を得る．

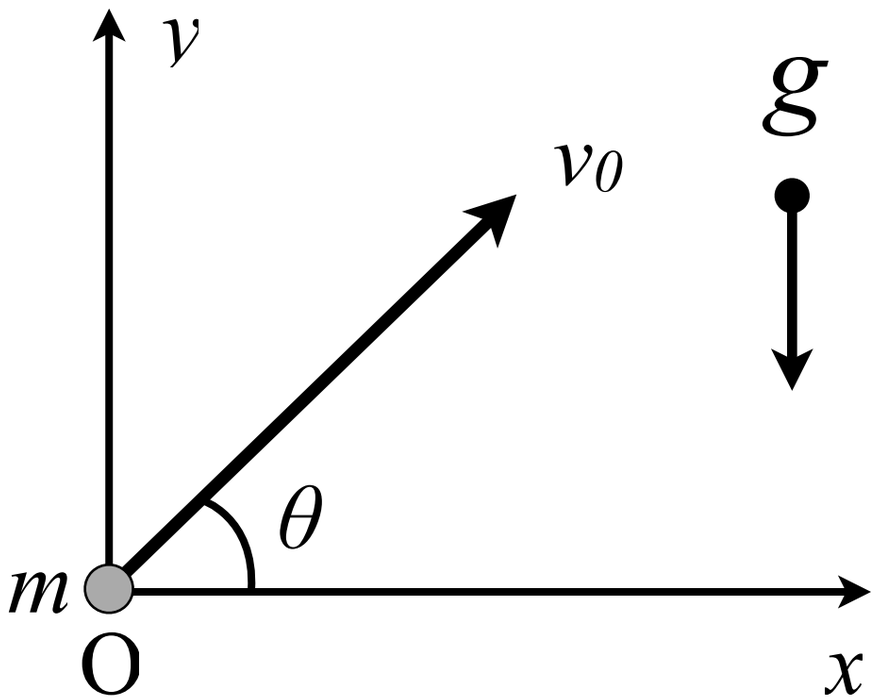
さて，積分をやってみる

- まずは x 成分から

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = m\frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$

$$\rightarrow v_x(t) = \int \frac{dv_x(t)}{dt}dt = C$$

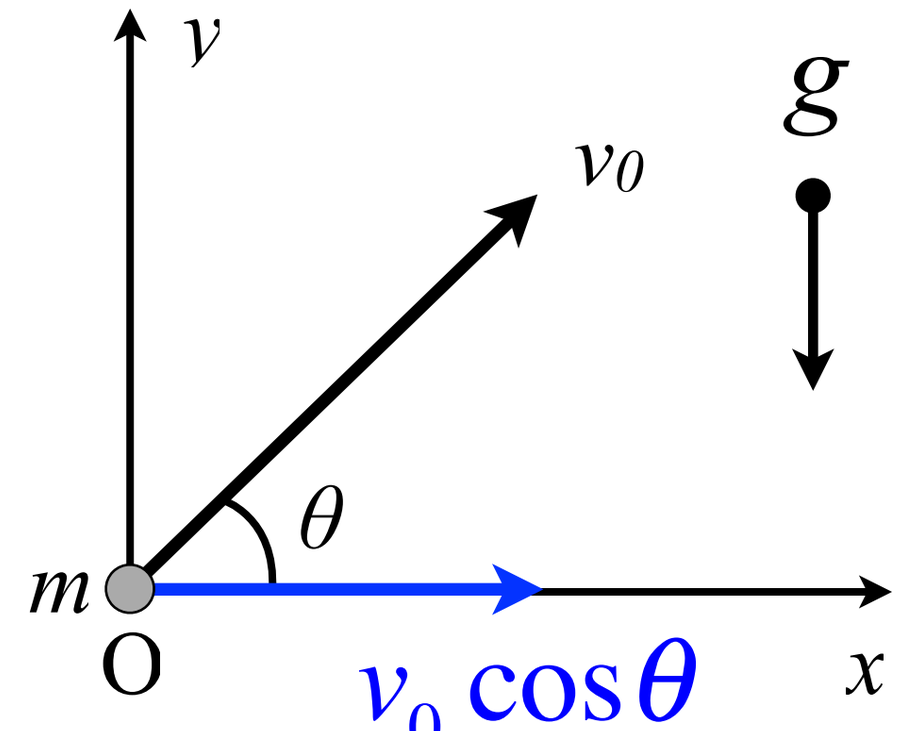
$$\rightarrow x(t) = \int v_x(t)dt = Ct + D$$



さて，積分をやってみる

- まずは x 成分から

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = m\frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$



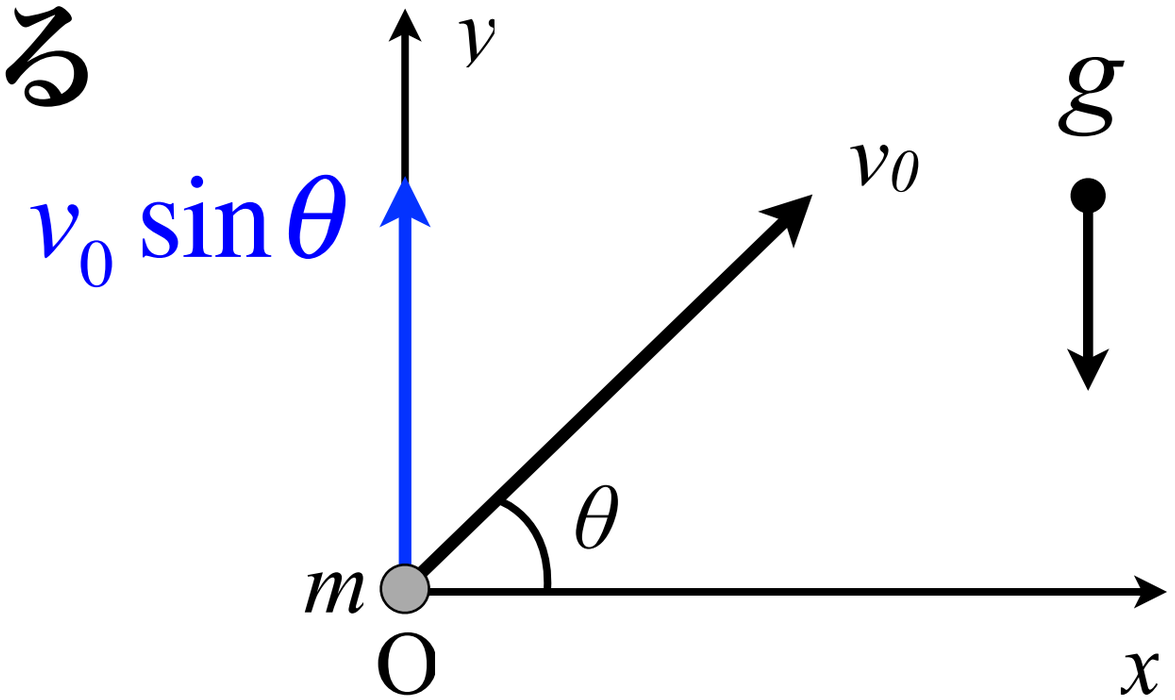
$$\rightarrow v_x(t) = \int \frac{dv_x(t)}{dt}dt = C = v_0\cos\theta$$

$$\rightarrow x(t) = \int v_x(t)dt = Ct + D = v_0\cos\theta \times t$$

さて，積分をやってみる

- 次に y 成分をやってみる

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = m\frac{dv_y(t)}{dt} = -mg$$



$$\rightarrow v_y(t) = \int \frac{dv_y(t)}{dt}dt = -gt + C = -gt + v_0\sin\theta$$

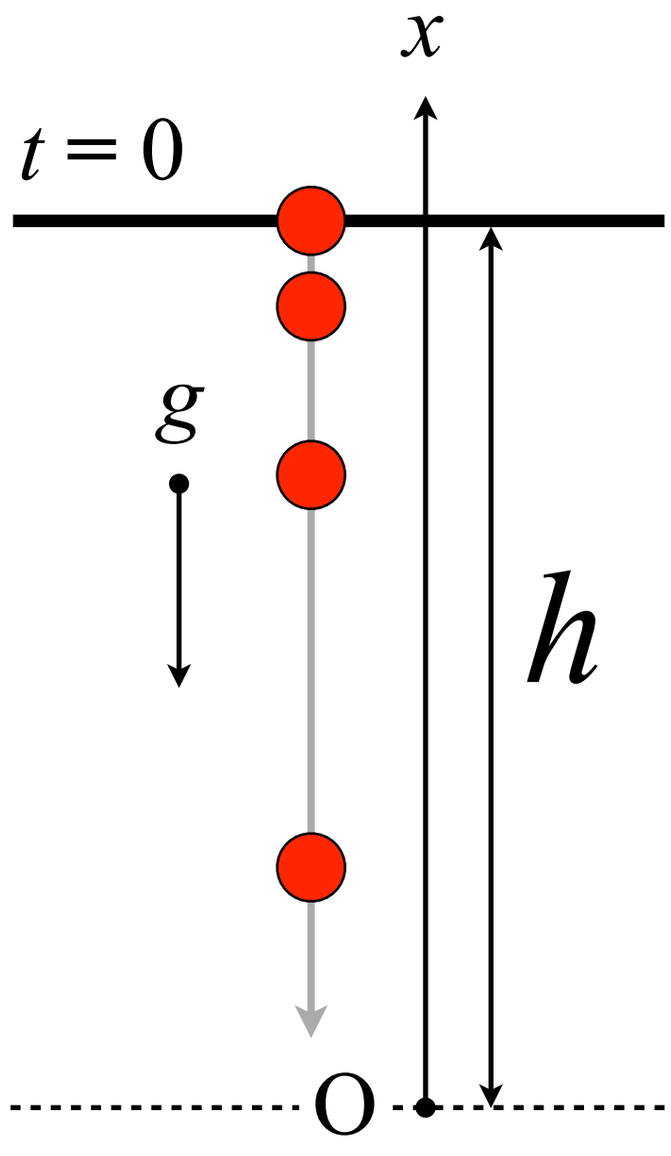
$$\rightarrow y(t) = \int v_y(t)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta \times t + D$$

$D = 0$

自由落下 - 再考

- 高さ h からの, 初速 0 の自由落下の変位は,

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$



- 地面に到達する（$x = 0$）までにかかる時間 t_g は,

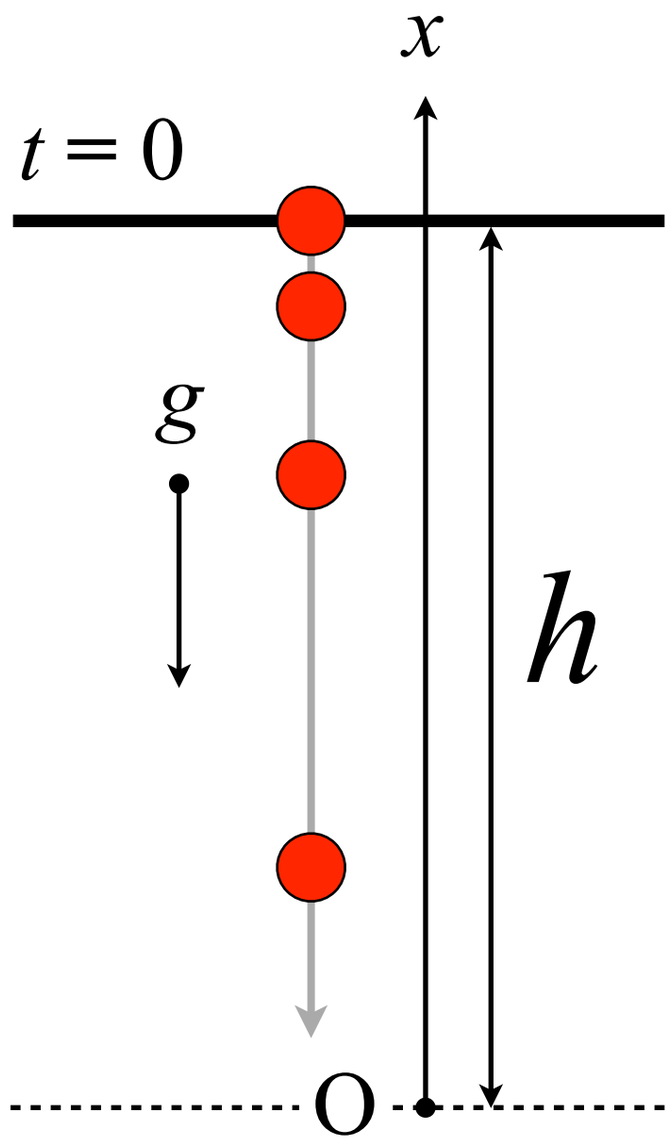
$$t_g = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

自由落下 - 再考

- 地面に到達したときの速度が出せる

$$v(t) = -gt \qquad t_g = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v(t_g) = -\sqrt{2gh}$$



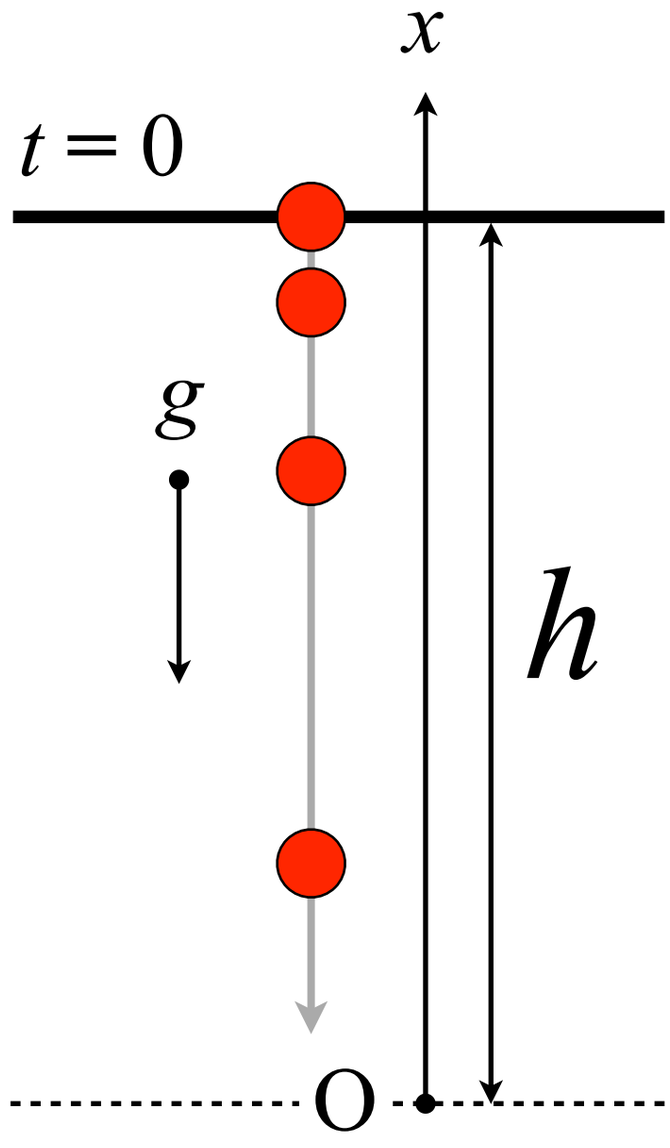
- 雨粒の地面への到達速度は?

（cf. 雨雲の高度は約 10 km）

雨粒のスピードは？

- $h = 10$ km, $g \sim 10$ m s^{-2} として計算すればOK

$$v(t_g) = -\sqrt{2gh}$$



雨粒のスピードは？

- $h = 10$ km, $g \sim 10$ m s^{-2} として計算すればOK

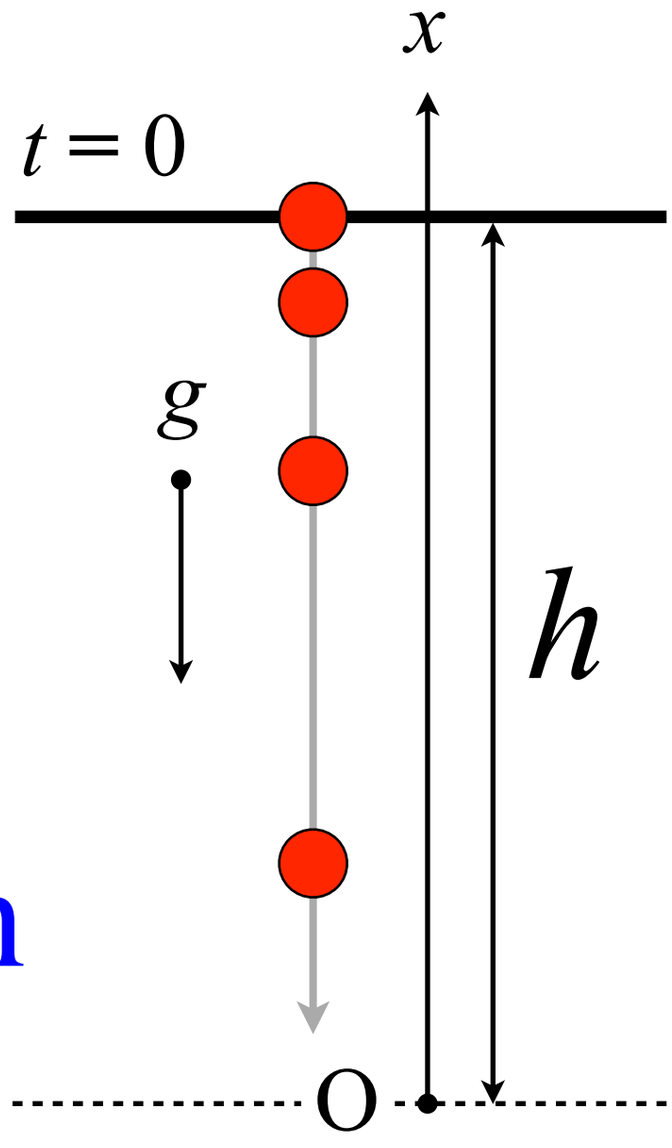
$$v(t_g) = -\sqrt{2gh}$$

$g \sim 10$ m s^{-2}

$h = 10$ km $= 10^4$ m

$$\left|v(t_g)\right| = \sqrt{2\times 10^5} \ \text{m/s}$$

$$\sim 450 \ \text{m/s} \sim 1600 \ \text{km/h}$$

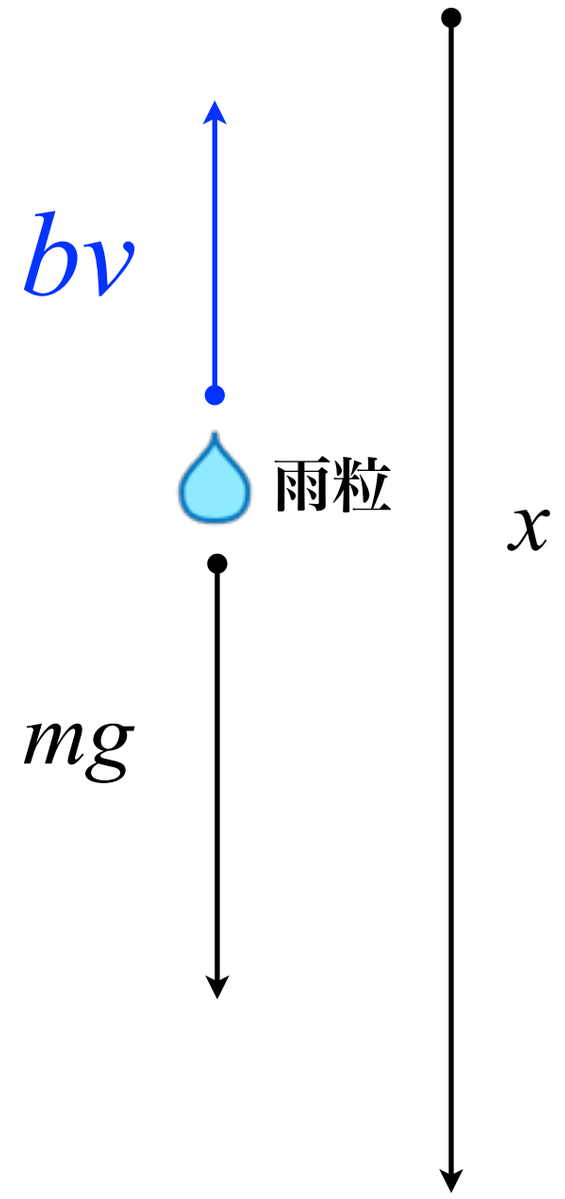


何故, 雨粒は痛くないのか？

- 空気抵抗がその運動を妨げているから...

- 速さが小さい間は, 物体の速さ に比例した空気抵抗が働く

$$F = bv \qquad b \text{ は粘性抵抗係数}$$



- 速さに比例する抵抗を**粘性抵抗**と呼ぶ.

空気抵抗, もう少し詳しく ⑰

- 半径 R の球状の物体に働く**粘性抵抗係数**は,

$$b = 6\pi\eta R$$

– ストークスの法則

η: 粘度, 粘性係数

- 物体の速さが大きくなると, 速さの 2 乗に比例する**慣性抵抗**が支配的になる

$$F = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

ρ: 気体の密度

C: 抵抗係数

A: 物体の断面積

ちょっと問題 ⑱

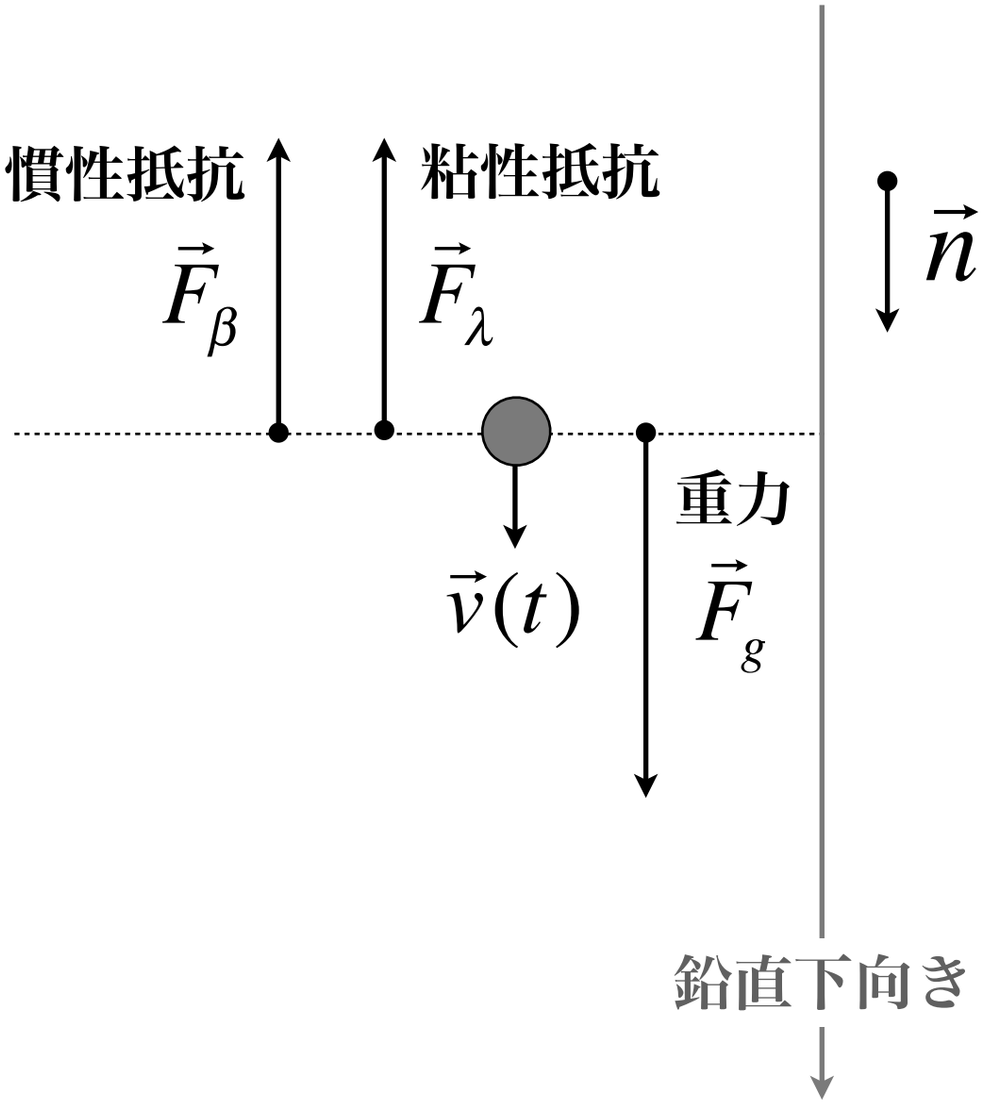
1c. 速度 $\vec{v}(t)$ で落下運動する質量 m の質点に作用する力の総和 $\vec{F}$ はどのように表されるか．重力加速度の大きさを g, 粘性抵抗の比例定数を λ, 慣性抵抗の比例定数を β, 鉛直方向下向きの単位ベクトルを $\vec{n}$ として答えよ．

重力　　慣性抵抗

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_\lambda + \vec{F}_\beta$$

粘性抵抗

$$=$$



ちょっと問題 ⑱

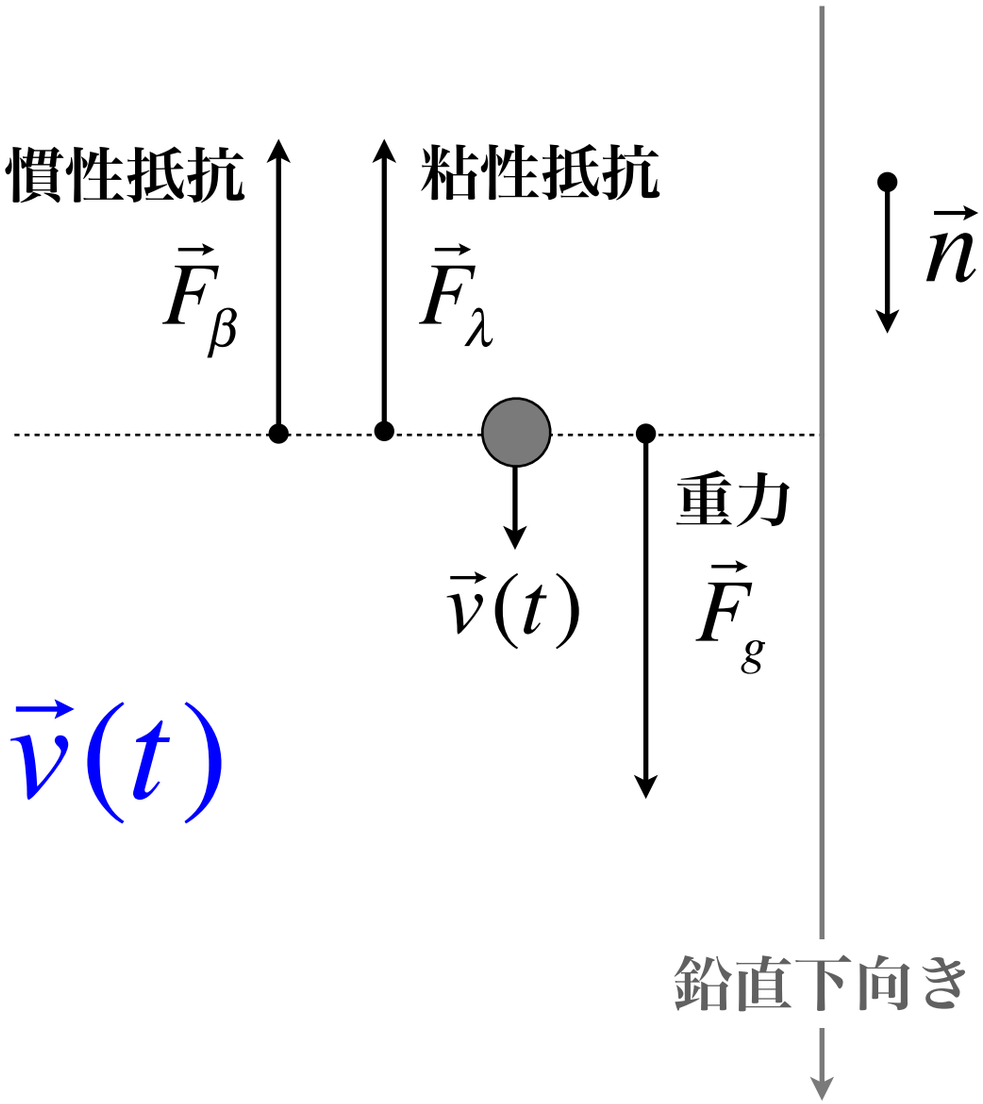
1c. 速度 $\vec{v}(t)$ で落下運動する質量 m の質点に作用する力の総和 $\vec{F}$ はどのように表されるか．重力加速度の大きさを g, 粘性抵抗の比例定数を λ, 慣性抵抗の比例定数を β, 鉛直方向下向きの単位ベクトルを $\vec{n}$ として答えよ．

重力　　慣性抵抗

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_\lambda + \vec{F}_\beta$$

粘性抵抗

$$= mg\vec{n} - \lambda\vec{v}(t) - \beta|\vec{v}(t)|\vec{v}(t)$$

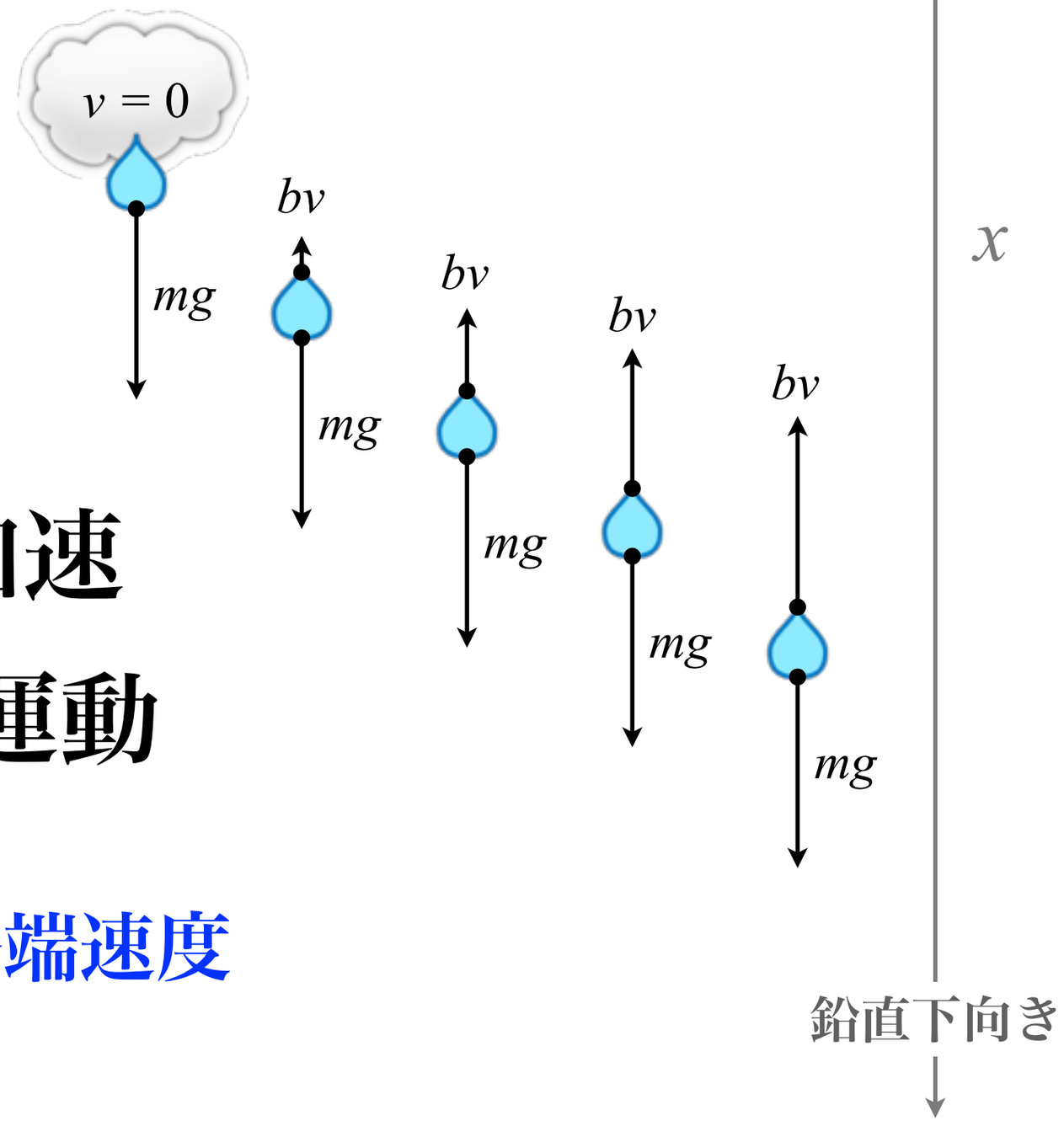


雨粒の落下について考える ⑲

- 粘性抵抗だけを考えると運動方程式は,

$$m\boxed{\frac{dv}{dt}} = mg - bv$$

加速度



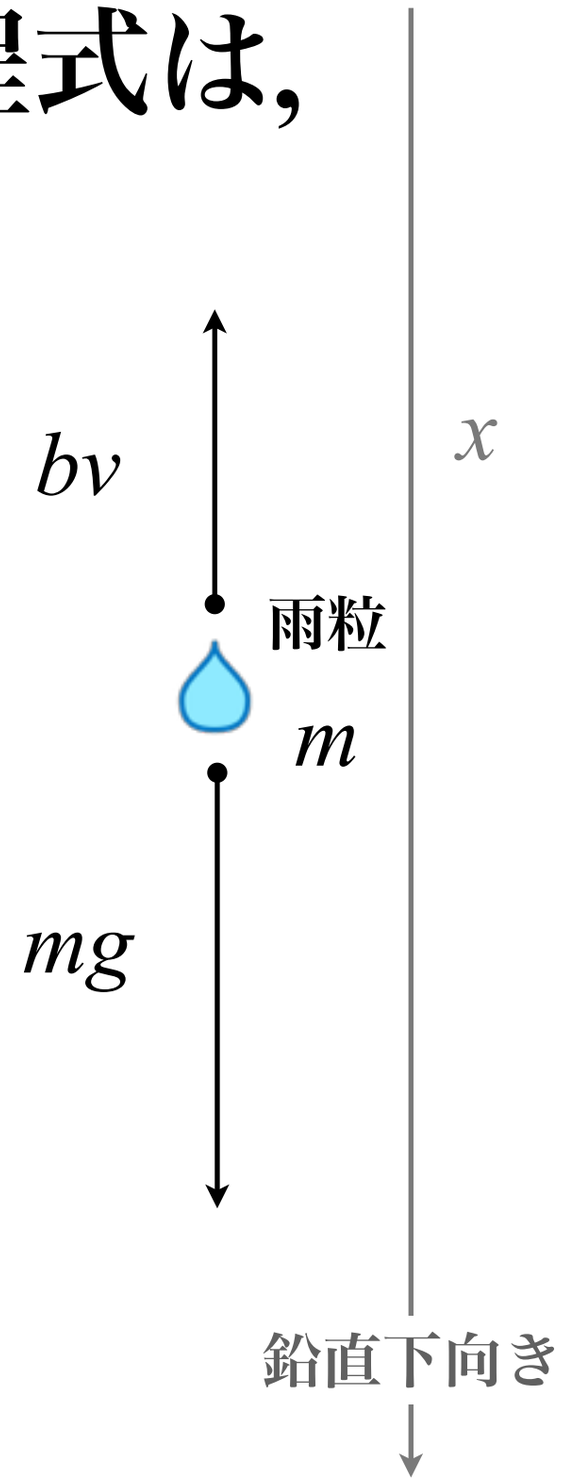
- $mg = bv$ になるまで加速
  それ以降は v_t で等速運動

$$v_t = \frac{mg}{b}$$ ：終端速度

運動方程式を解いてみる ⑳

- 粘性抵抗だけを考えると運動方程式は,

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - bv(t)$$



- $v(t)$ に関する 1 階の微分方程式

  → 両辺を積分すれば $v(t)$ が出る？

  No! 右辺に未知の $v(t)$ がある...

変数分離形の微分方程式 ㉑

- 変数分離形の微分方程式と呼ばれる

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

- これが余計なの

これがなければ普通に積分するだけ...

例: $\frac{dy}{dx} = -\gamma y,$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$ $\frac{dy}{dx} = \mu(1-y)y$

じゃあどうやって解くか？

- 変数をとにかく左辺と右辺に分ける

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \longrightarrow \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

あとは両辺を積分して $y=$ の形にするだけ

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx \longrightarrow y = \boxed{x\text{の関数}}$$

雨粒についてやってみる

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv$$

変数分離の下準備

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b}{m}\left(\frac{mg}{b} - v\right)$$

変数分離！

$$\frac{1}{\frac{mg}{b} - v}dv = \frac{b}{m}dt$$

積分

$$\int \frac{1}{\frac{mg}{b} - v}dv = \int \frac{b}{m}dt$$

$$\int \frac{1}{A - v}dv = -\log|A - v| \text{ を使う}$$

$$-\log\left|\frac{mg}{b} - v\right| = \frac{b}{m}t + C$$

$$\left|\frac{mg}{b} - v\right| = e^{-\frac{b}{m}t}e^{-C}$$

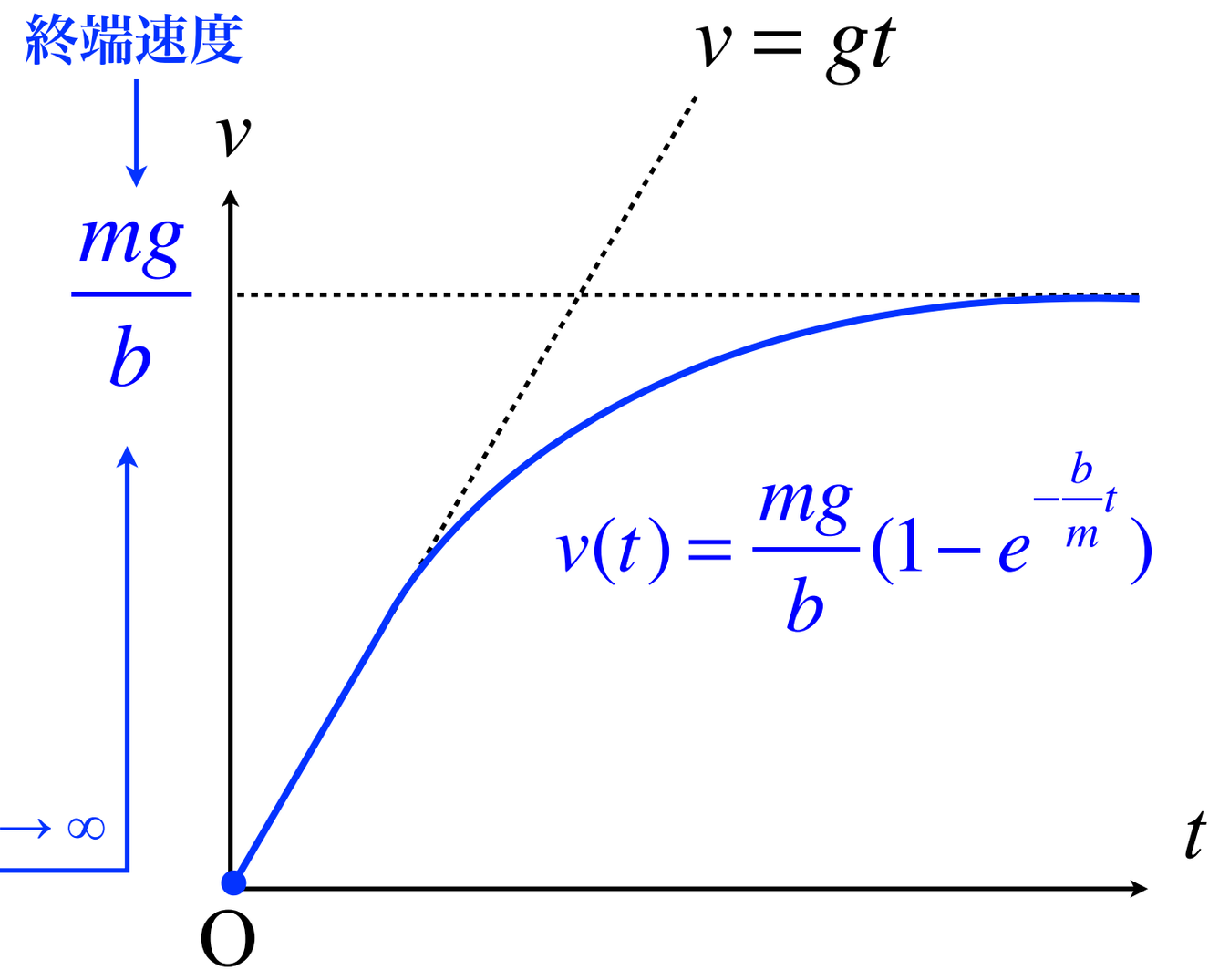
積分定数を決める

- $v(0)=0$ であることを考えると C が決まる

$$\left|\frac{mg}{b}-v\right|=e^{-\frac{b}{m}t}e^{-C}$$

$v(0)=0$

$$\frac{mg}{b}=e^{-C}$$

$$v(t)=\frac{mg}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}t})$$

$t\to\infty$