

物理学概論第一

第5回

では、今週の講義...

第 01 回: 力学 ① - 物理量の表現, 単位, 次元

第 02 回: 力学 ② - 質点と運動の表し方

第 03 回: 力学 ③ - 運動の法則

第 04 回: 力学 ④ - 力と運動 I

第 05 回: 力学 ⑤ - 力と運動 II その 1 (単振動)

第 06 回: 力学 ⑥ - 力と運動 II その 2

第 07 回: 力学 ⑦ - 熱仕事と運動エネルギー

第 08 回: 力学 ⑧ - 保存力とポテンシャルエネルギー

第 09 回: 力学 ⑨ - エネルギー保存則

古典力学の王道

2

- 我々の目標: 物体の位置ベクトルを追跡

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

- そのための武器:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t)$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

$$\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{v} - \beta |\mathbf{v}| \mathbf{v}$$

$$F = -kx$$

- 運動方程式を積分し, 位置ベクトルを求める
- 今日は, 弾性力 $F = -kx$ による運動を考える

弾性力 - フックの法則

③

- 弾性力: 固体を変形させるとき, 変形を元に戻そうとして働く復元力

弾性定数 (正の値)
ばねの場合, ばね定数

$$F = -kx$$

↑
自然な状態からの変形の大きさ
ばねの場合, ばねの伸び

ばねにおもりを吊す

4

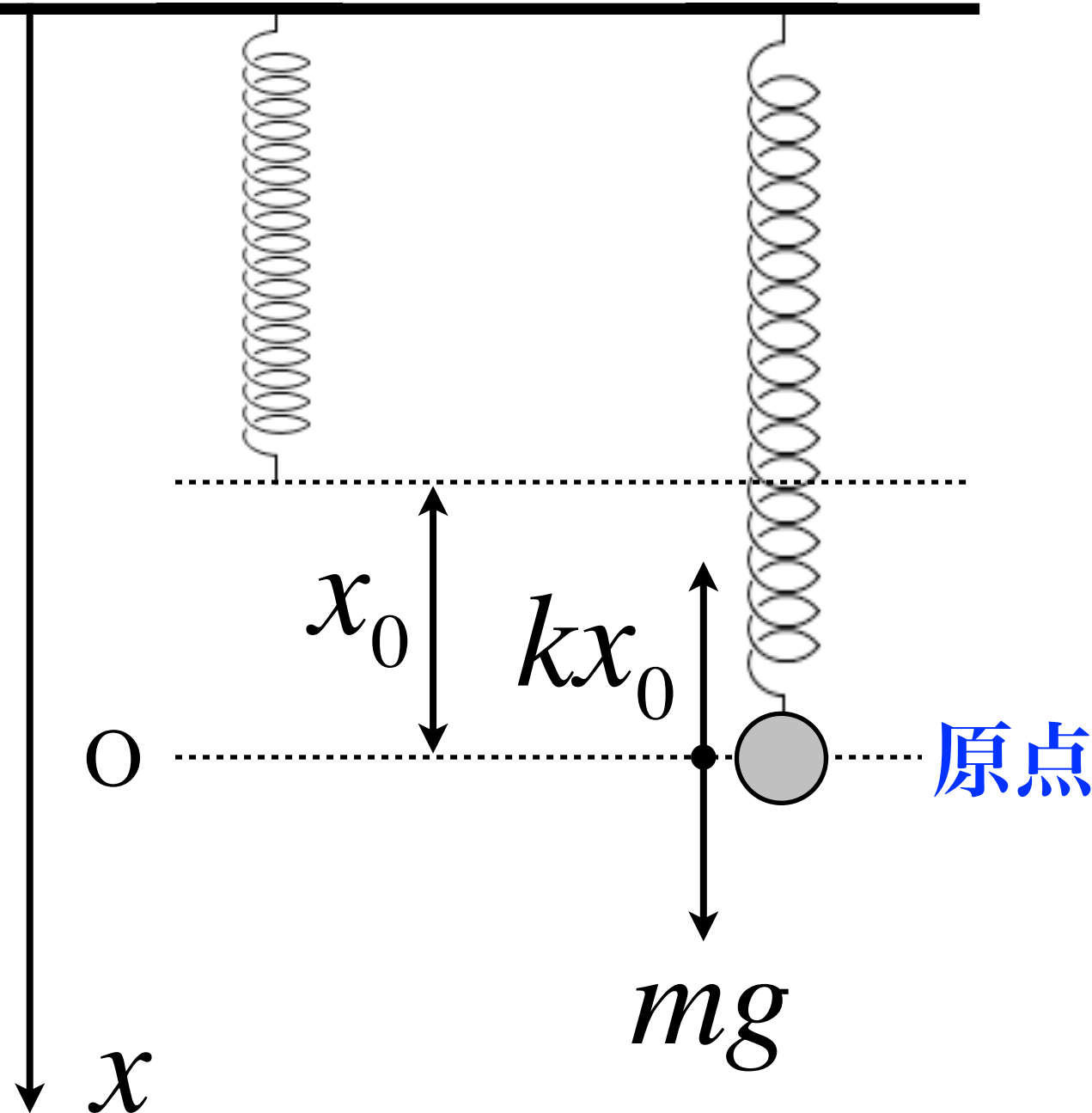
自然長

つりあい

重力 mg と弾性力 kx_0 が
つり合っている状態

$$mg = kx_0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$



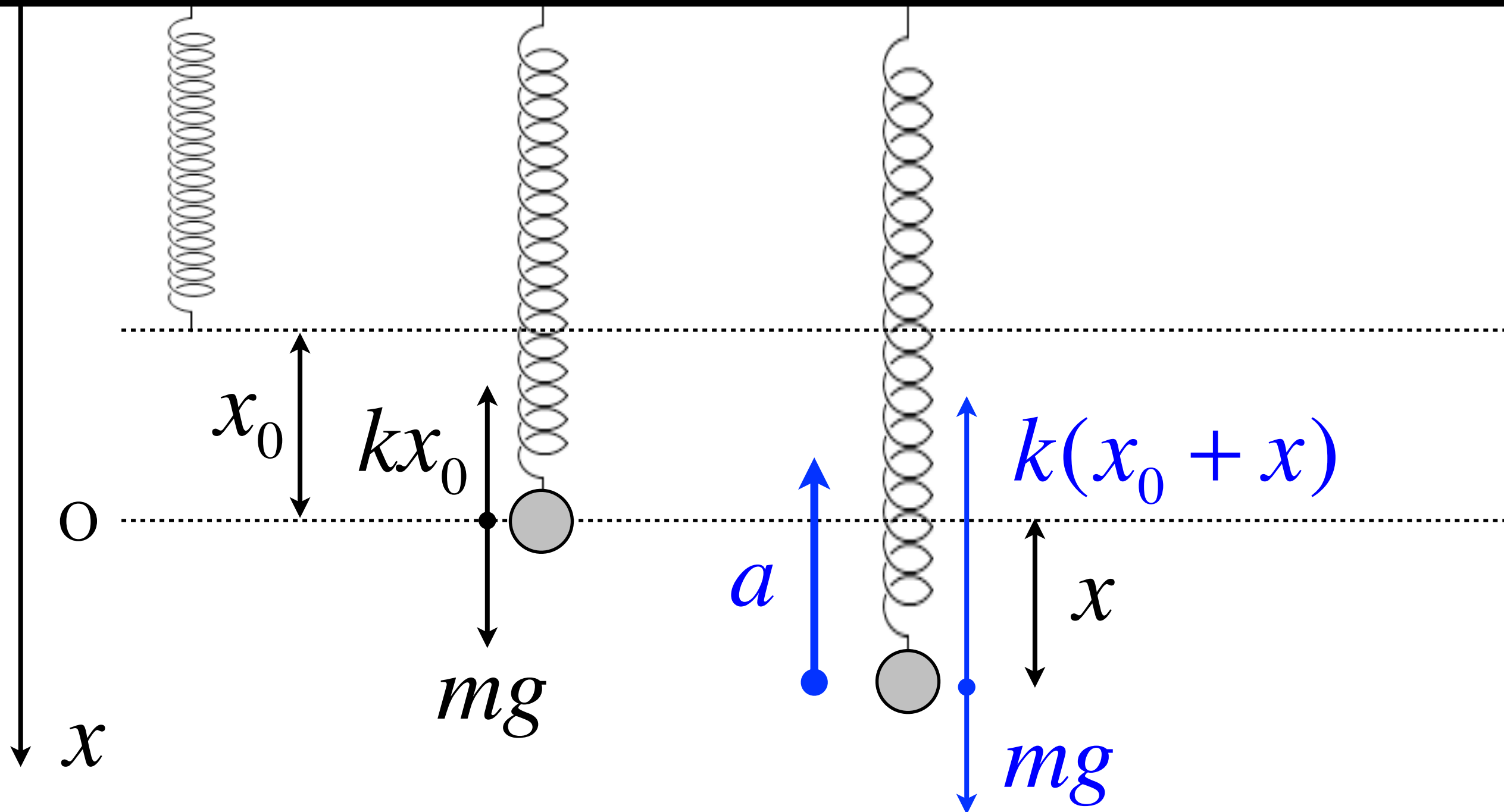
さらに引っ張って離す

⑤

自然長

つりあい

さらに x だけ下へ



つりあいの位置を通り過ぎる

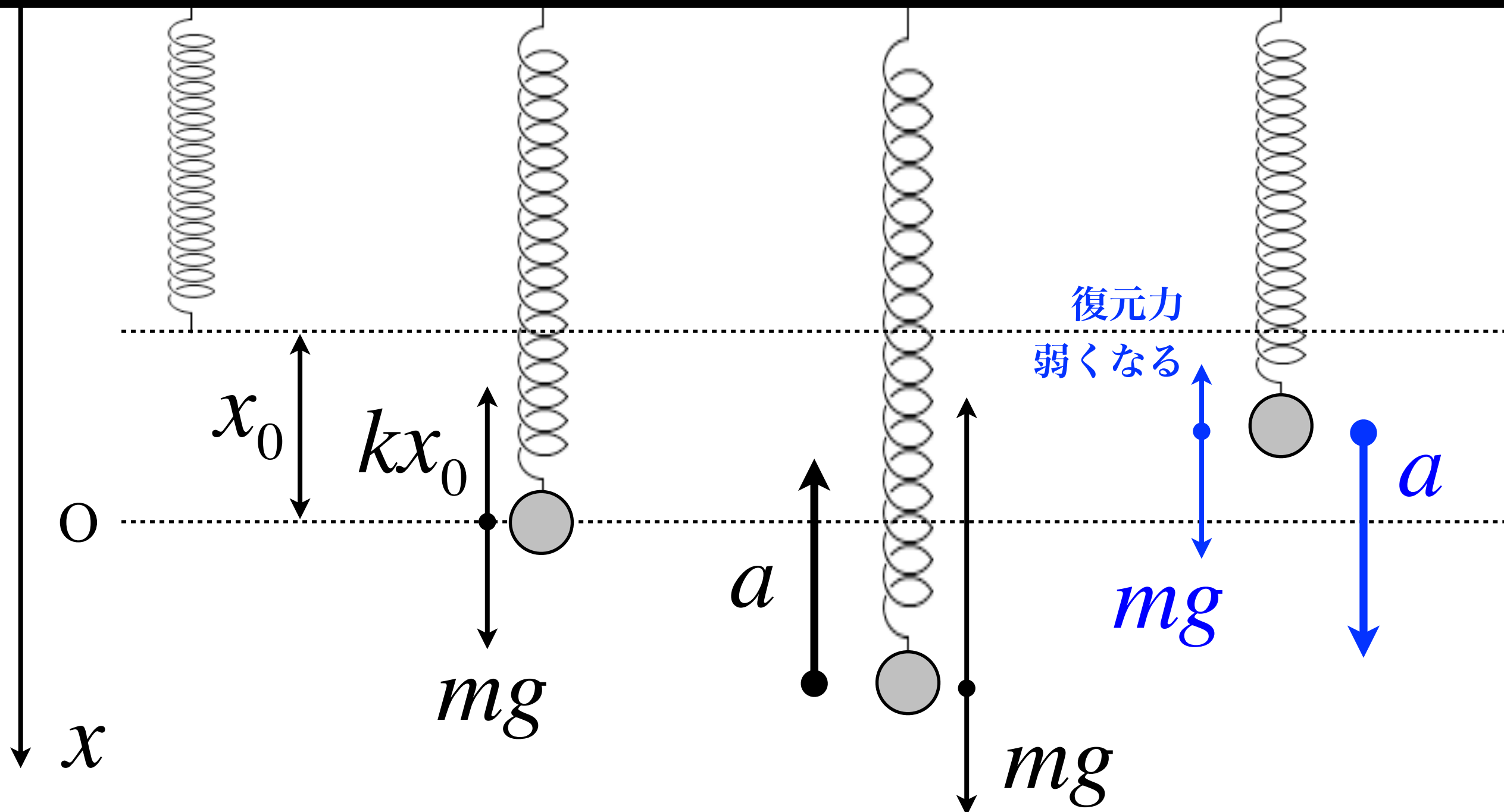
⑥

自然長

つりあい

さらに x だけ下へ

戻りすぎる



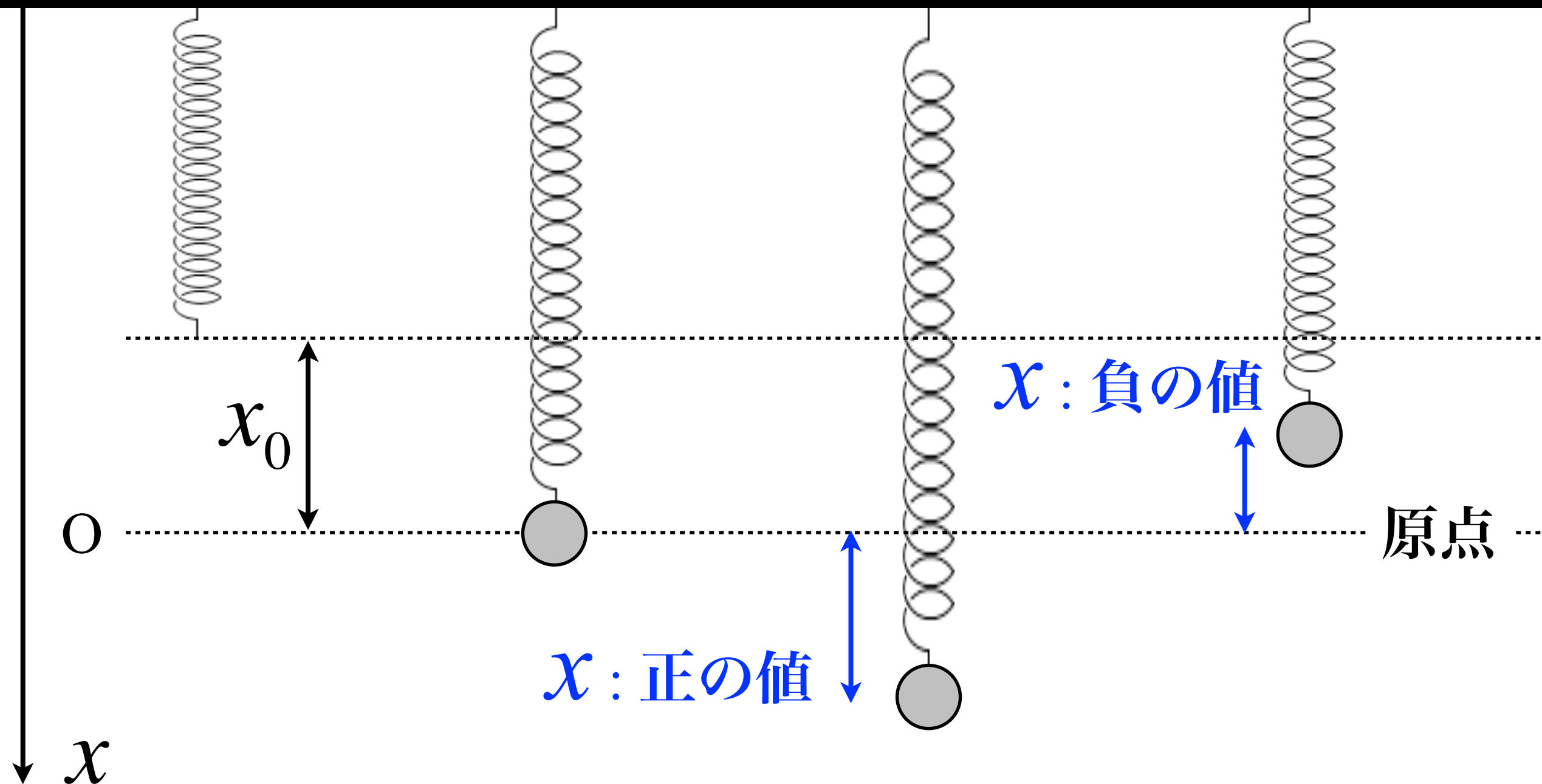
これがいわゆる単振動

7

自然長

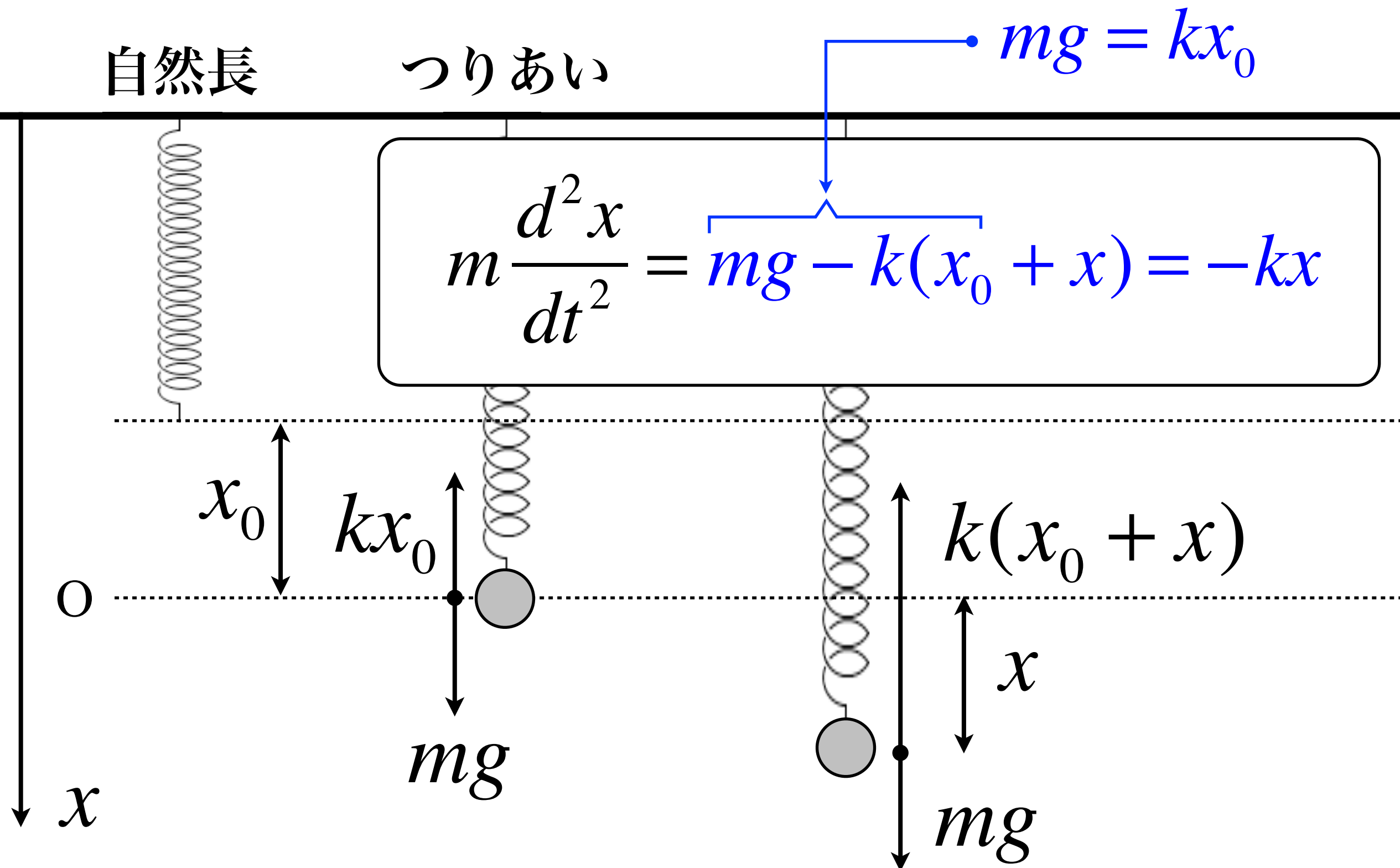
つりあい

原点の上下を振動する



おもりの運動方程式

8



単振動の従う微分方程式

⑨

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \iff \frac{d^2 x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}} x$$

正の値

単振動の微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \overbrace{-\omega^2}^{\text{負の値}} x$$

$$\omega^2$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

微分方程式の一般解を探す

⑩

- 時間で 2 回微分すれば, 元の関数の $-\omega^2$ 倍になるような関数を探す. ひとつの候補は,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} =$$

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} =$$

微分方程式の一般解を探す

⑩

- 時間で 2 回微分すれば, 元の関数の $-\omega^2$ 倍になるような関数を探す. ひとつの候補は,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x(t)$$

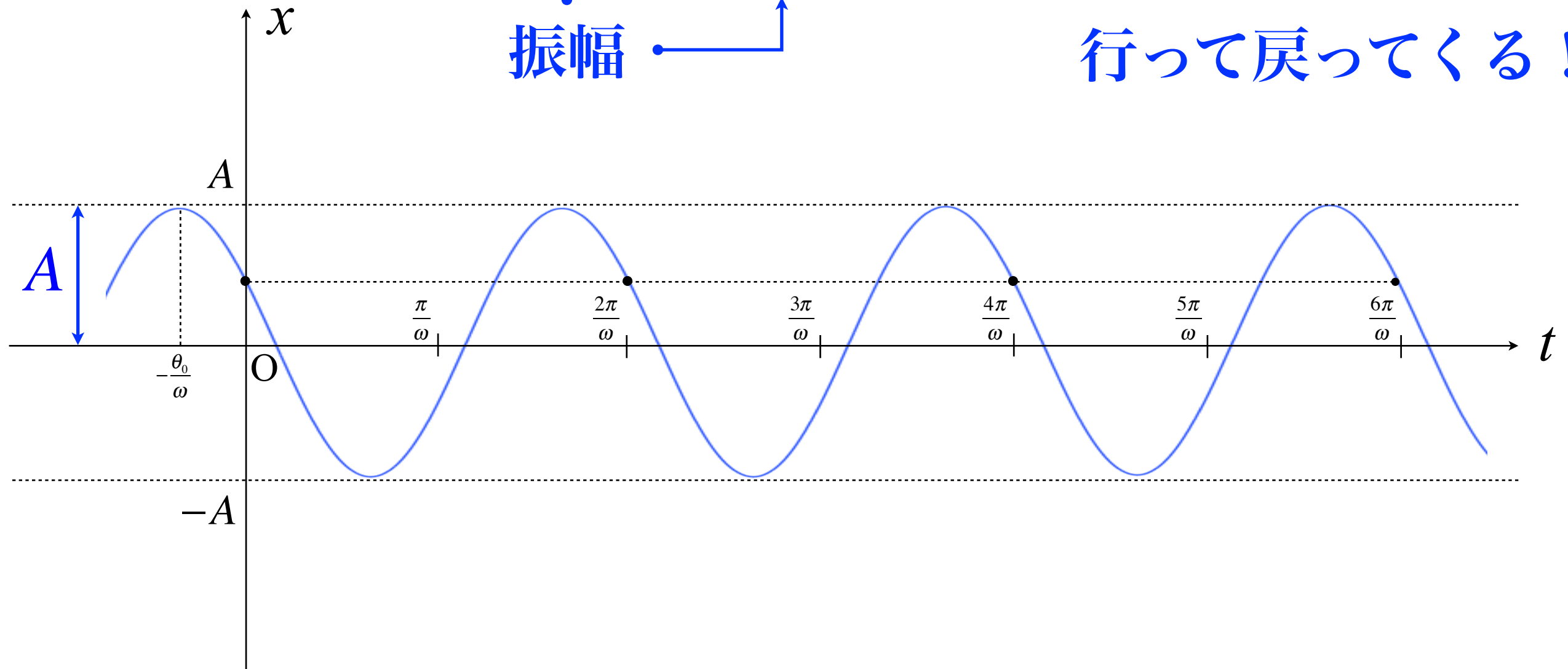
一般解の形

三角関数: ± 1 の間の往復運動

11

- 一般解 $x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$ を描いてみる

振幅 $x = A, -A$ の間を往復する **周期運動**
行って戻ってくる！



位相という概念

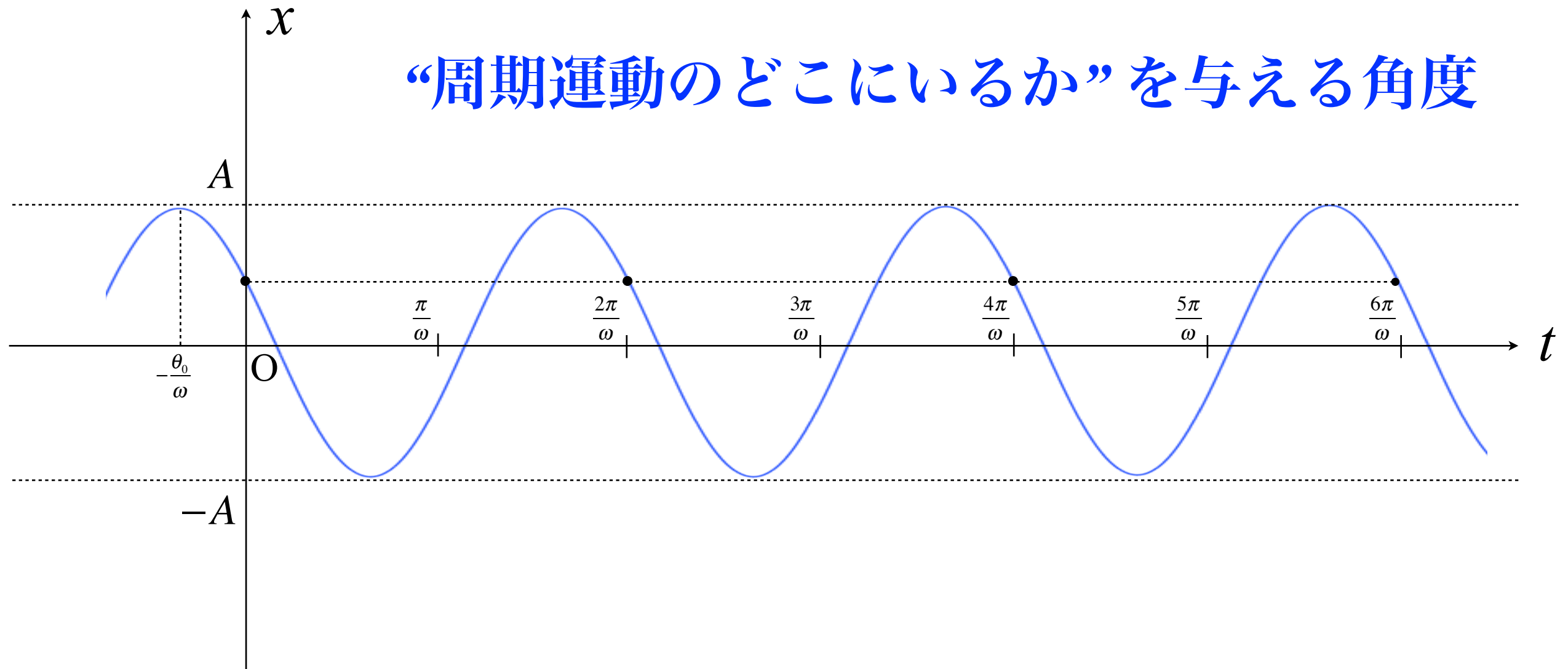
12

初期位相

- 一般解 $x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$ を描いてみる

位相 - Phase

“周期運動のどこにいるか”を与える角度



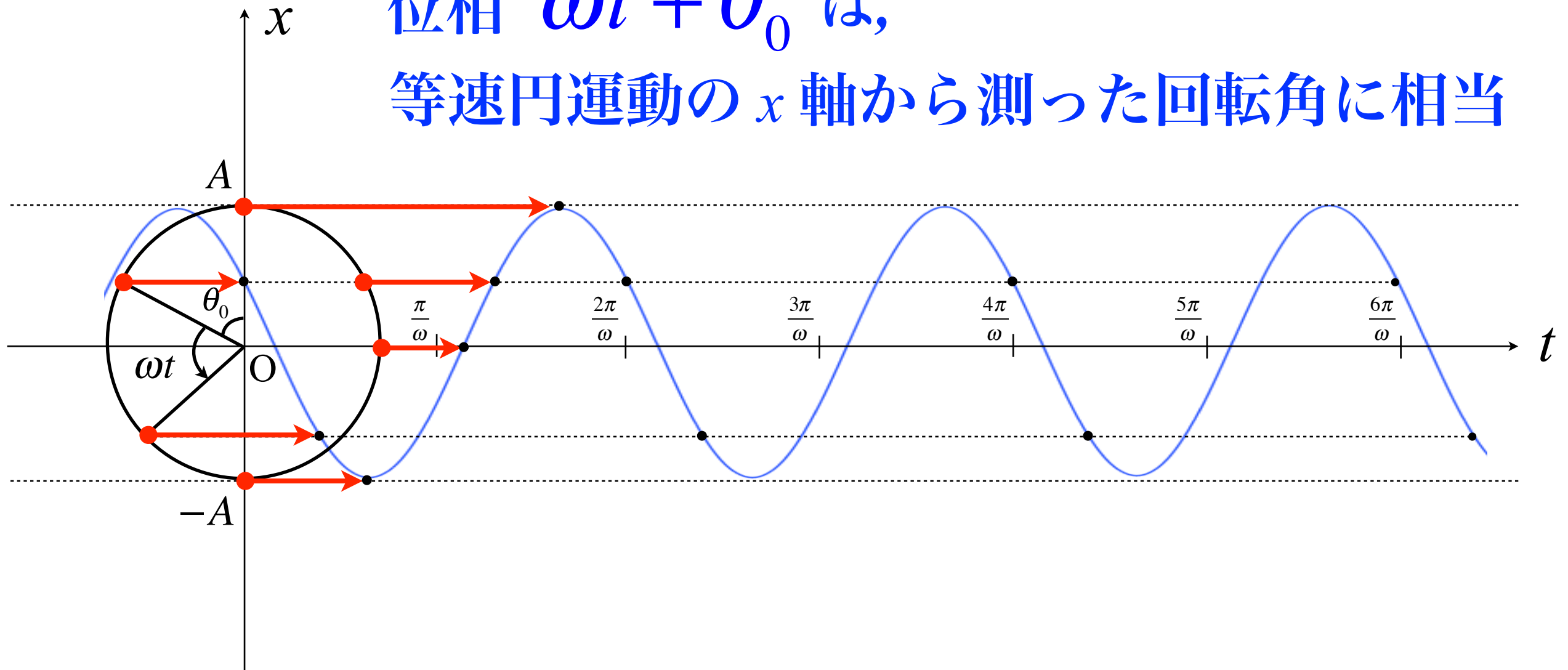
単振動と等速円運動

13

- 単振動の変位 = 等速円運動の x 座標

$$A \cos(\omega t + \theta_0)$$

位相 $\omega t + \theta_0$ は,
等速円運動の x 軸から測った回転角に相当



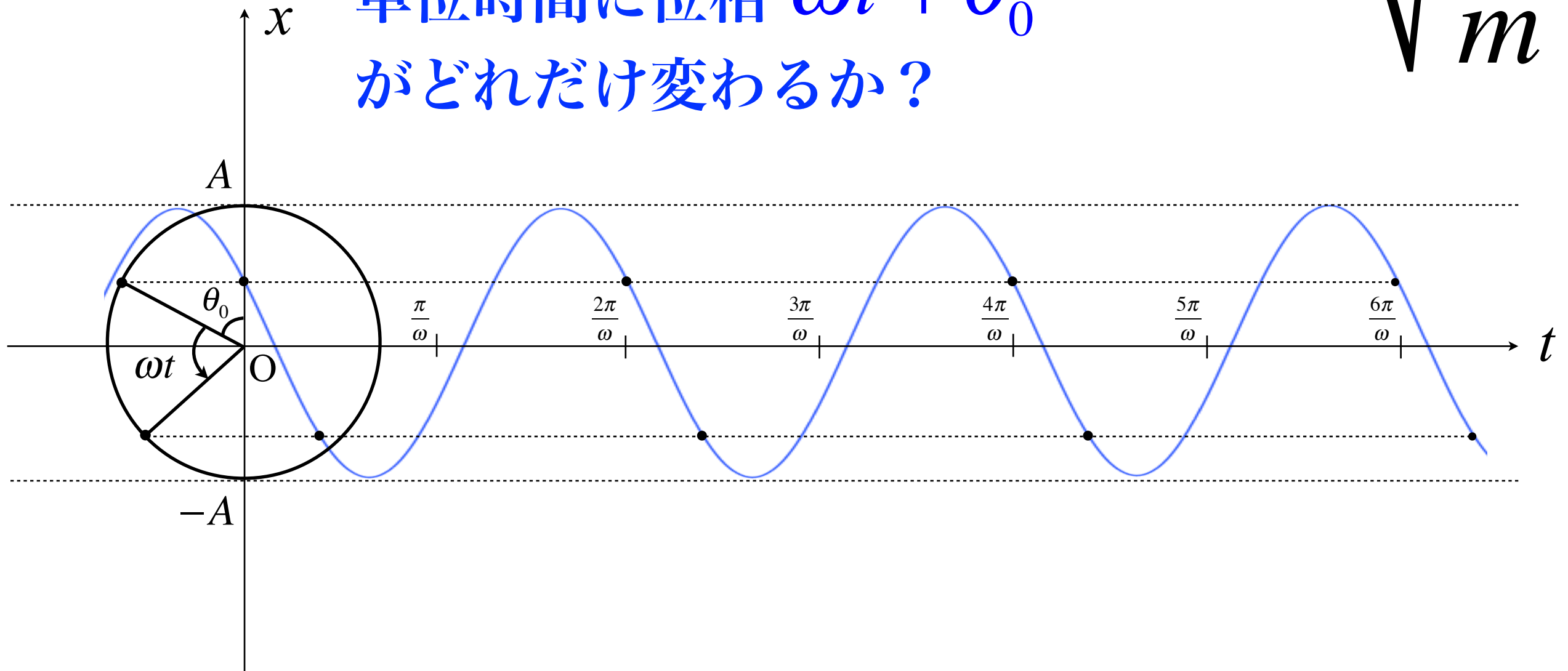
角振動数: ω

14

- 等速円運動の角速度に相当する

単位時間に位相 $\omega t + \theta_0$
がどれだけ変わるか？

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

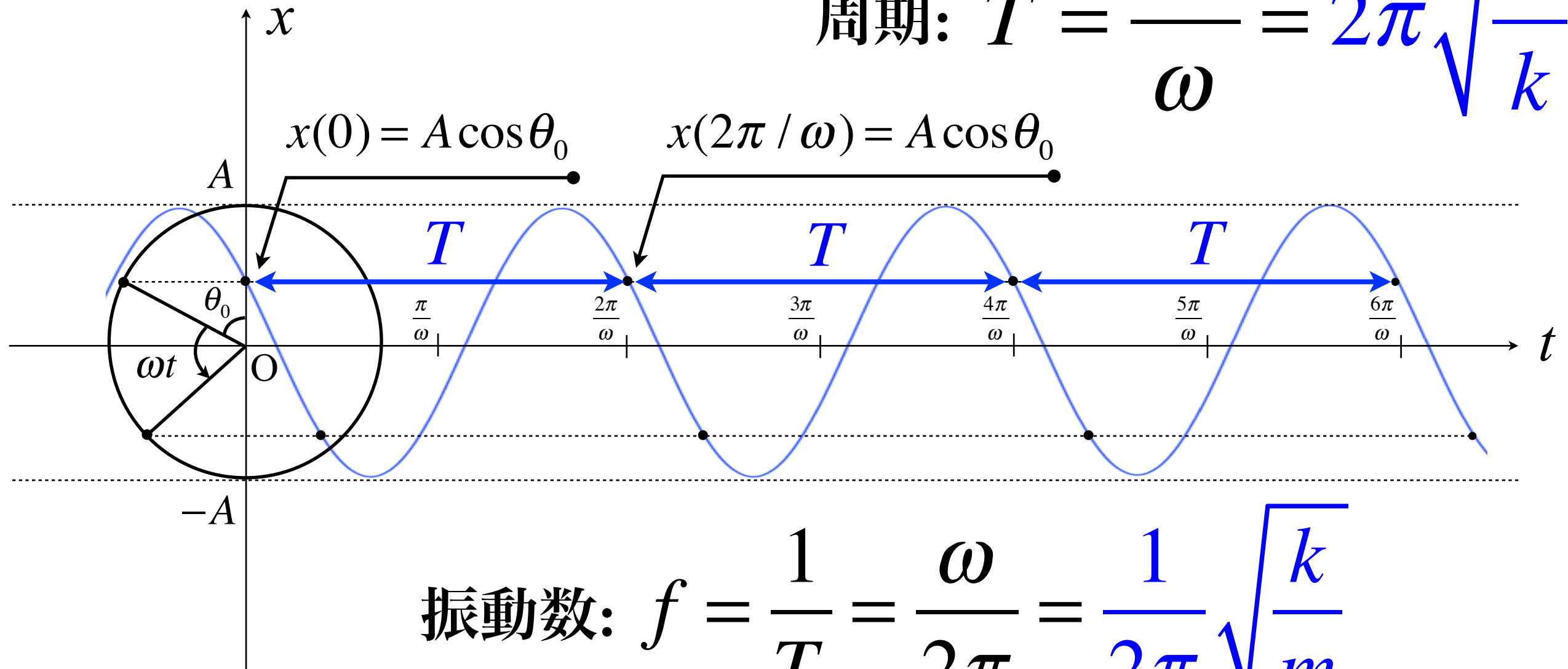


周期性を表現する物理量: T, f ⑮

- $2\pi / \omega$ ごとに同じ**運動状態**になる

位置 & 速度 ←

$$\text{周期: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$\text{振動数: } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

周期性を決める要素

16

- 振動数の式を良く見てみる...

単位時間あたり何回振動するか？

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

→ k が大きい (=ばねが強い)
→ f が大きい (振動が速い)

→ m が大きい (=おもりが重い)
→ f が小さい (振動が遅い)

- しかし, f は振幅 A には依存しない: 等時性

特殊解を求めるには...

17

- $x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$ はあくまで一般解
- A とか θ_0 を決めて, 特殊解を求めたい
- 特殊解を求めるには, 初期条件が必要

初期条件:

$t = 0$ で, おもりの位置 x_0 , 速度 v_0 とする

任意定数は初期条件に対応

18

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) \longrightarrow x(0) = A \cos \theta_0 = x_0$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \theta_0) \longrightarrow v(0) = -\omega A \sin \theta_0 = v_0$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$= A \cos \omega t \cos \theta_0 - A \sin \omega t \sin \theta_0$$

$$= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

弾性力による位置エネルギー

①9

- ばねの弾性力による単振動の位置と速度は,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0), \quad v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \theta_0)$$

- これを用いて以下の量を計算してみる

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

弾性力による位置エネルギー

20

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 =$$

弾性力による位置エネルギー

20

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A \sin(\omega t + \theta_0)]^2 + \frac{1}{2}k[A \cos(\omega t + \theta_0)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \theta_0)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \left[\begin{array}{l} \bullet \\ \rightarrow \end{array} \right] = \frac{1}{2}kA^2 \left[\frac{m\omega^2}{k} \sin^2(\omega t + \theta_0) + \cos^2(\omega t + \theta_0) \right]$$
$$= \frac{1}{2}kA^2$$

一定！

力学的エネルギー保存則

21

“運動エネルギー”

力学的エネルギー
の和が一定

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{Const.}$$

“弾性力による位置エネルギー”

単振り子というものもある

22

- 振り子に働く力

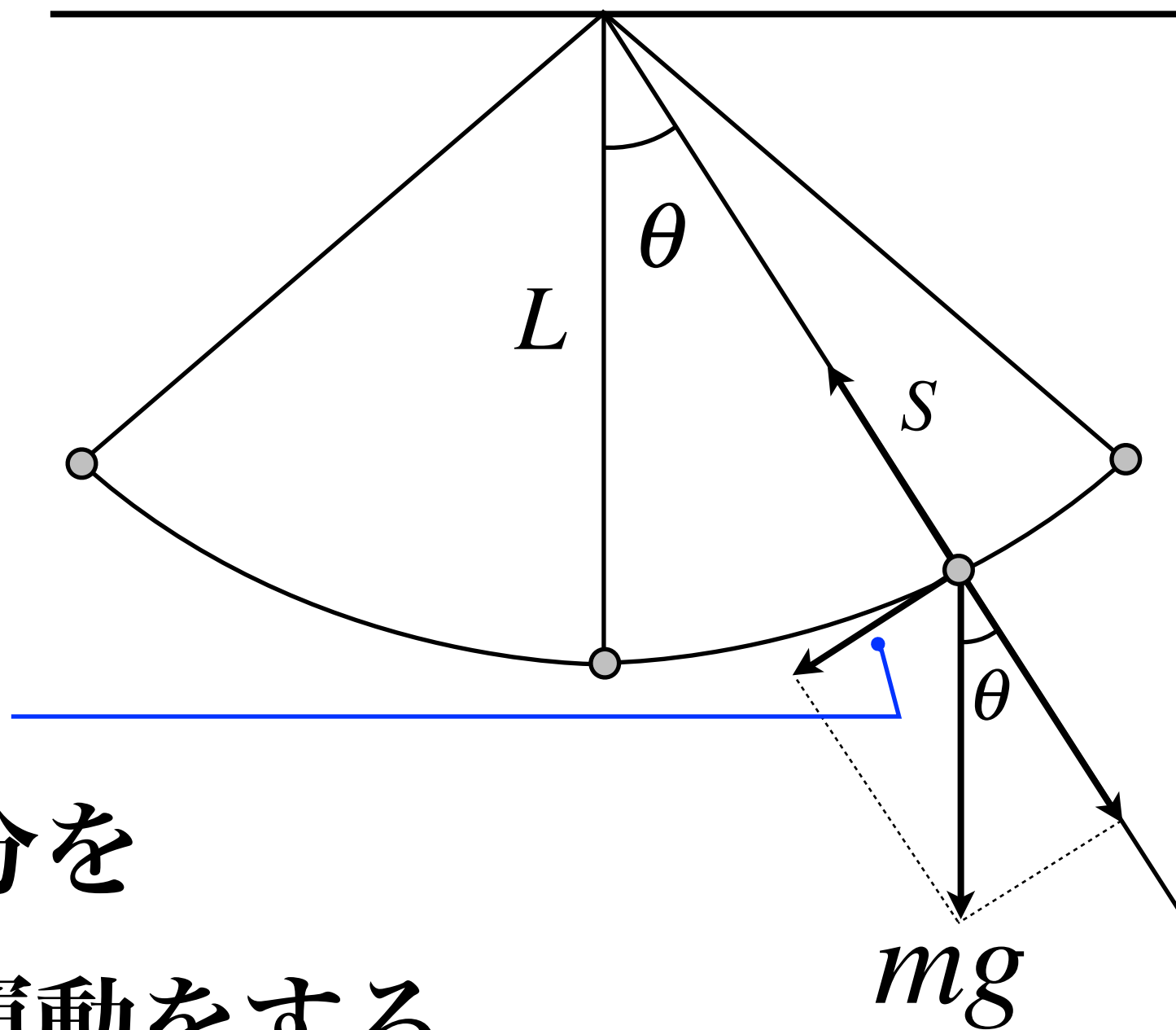
- 糸の張力 S

- 重力 mg

- $-mg \sin \theta$

- mg の接線方向成分を

復元力とする往復運動をする



単振り子の運動方程式

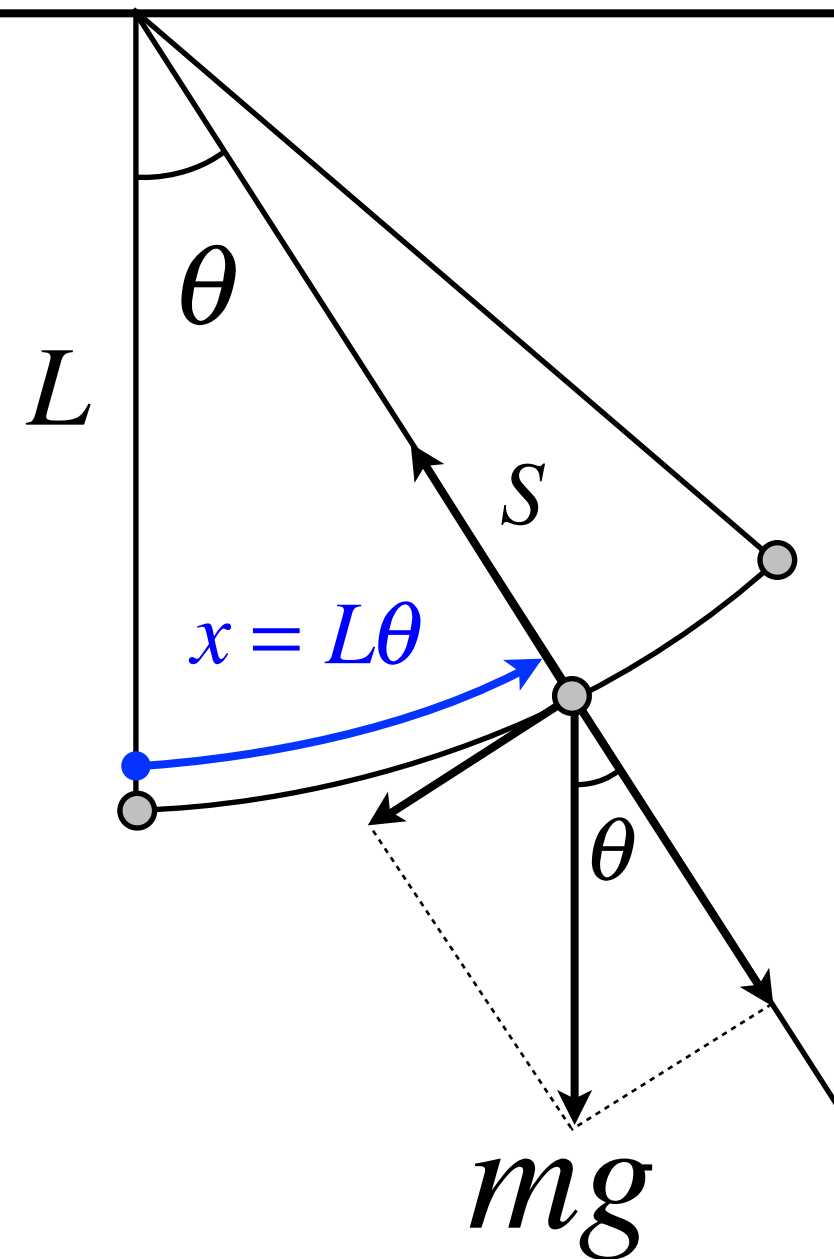
23

- 運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2 (L\theta)}{dt^2}$$

$$= mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta \approx -\frac{g}{L} \theta$$



微分方程式の一般解は？

24

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta = -\omega^2\theta, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

一般解

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \beta)$$

周期:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

振動数:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

