物理学概論第一

第 6 回

ここまでの流れ

第 01 回: 力学 ① - 物理量の表現, 単位, 次元

第 02 回: 力学 ② - 質点と運動の表し方

第 03 回: 力学 ③ - 運動の法則

第 04 回: 力学 ④ - 力と運動 I

第 05 回: 力学 ⑤ - 力と運動 II その 1（単振動）

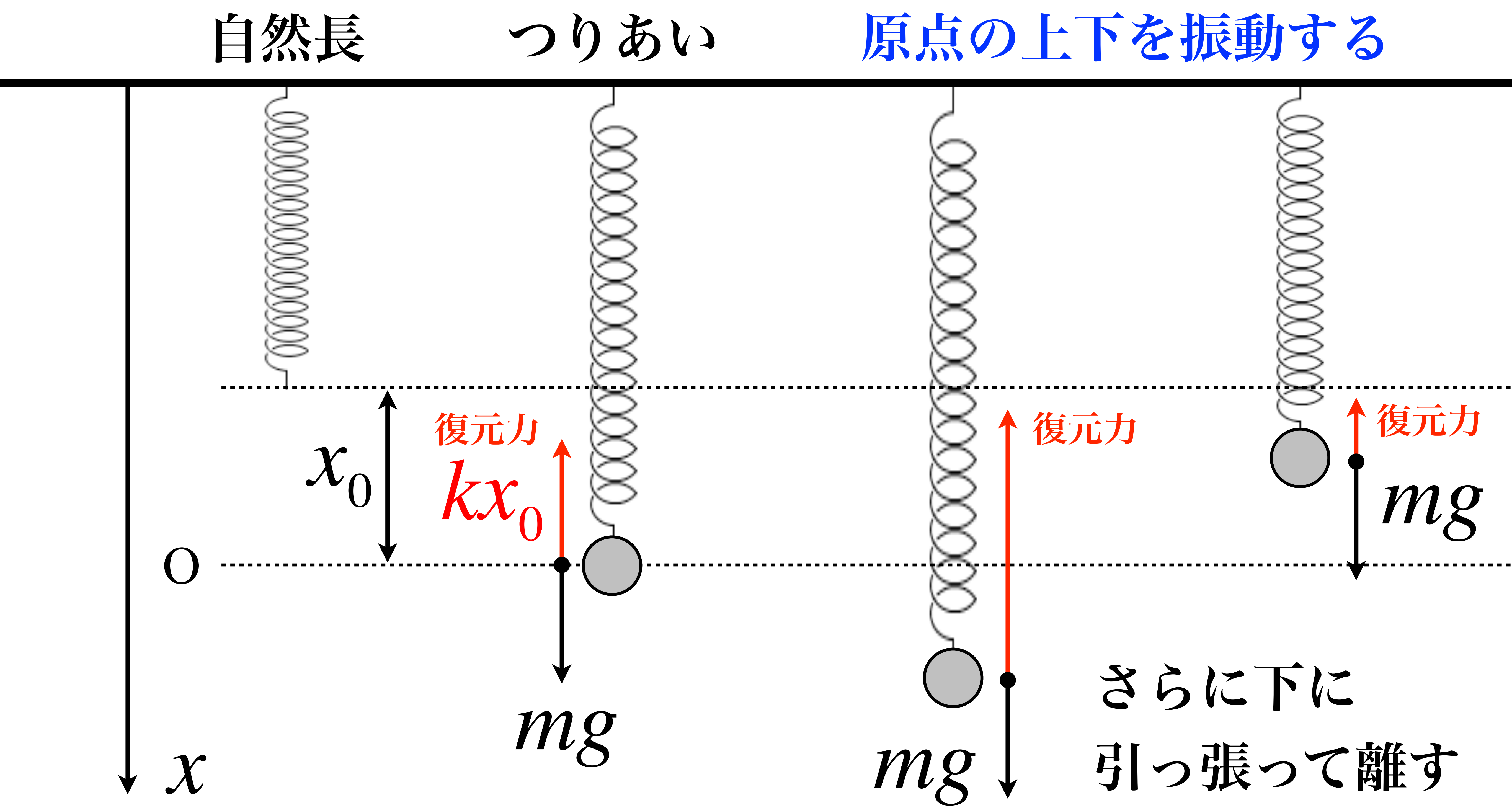
第 06 回: 力学 ⑥ - 力と運動 II その 2（減衰振動）

第 07 回: 力学 ⑦ - 熱仕事と運動エネルギー

第 08 回: 力学 ⑧ - 保存力とポテンシャルエネルギー

第 09 回: 力学 ⑨ - エネルギー保存則

単振動 - 復習 ②



自然長
つりあい
原点の上下を振動する
x_0
復元力
kx_0
O
mg
x
復元力
mg
さらに下に
引っ張って離す
復元力
mg

単振動の従う微分方程式 ③

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \iff \frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}x$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

単振動の微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \overbrace{-\omega^2}^{\text{負の値}}x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

角振動数

微分方程式の一般解を探す ④

- 時間で 2 回微分すれば, 元の関数の $-\omega^2$ 倍になるような関数を探す. ひとつの候補は,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

これはまだ一般解
初期条件を使って特殊解を求める

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x(t)$$

特殊解を考える ⑤

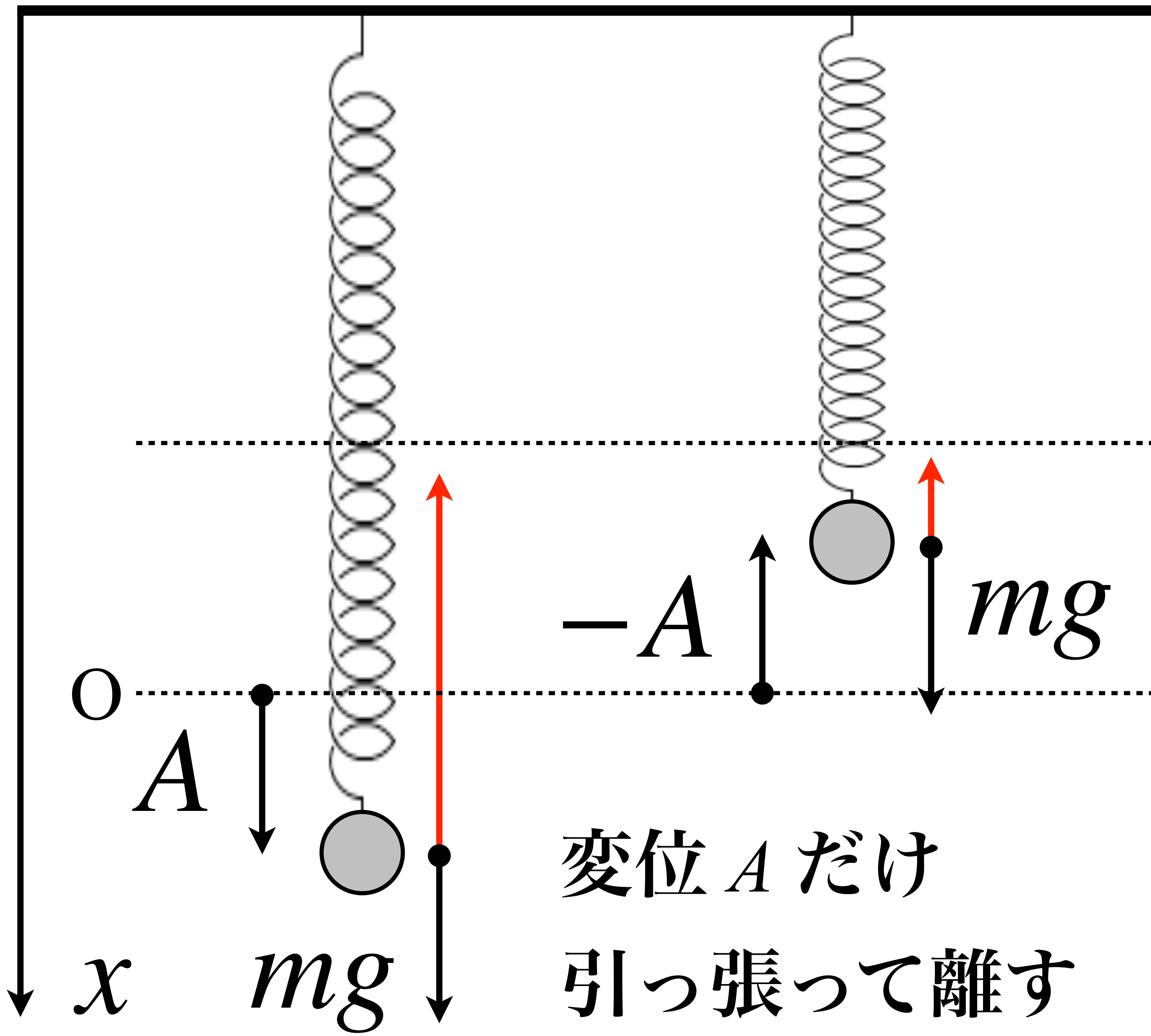
- A だけ下に引っ張って離す場合の特殊解は？

初期条件

$$x(0)=A,\ v(0)=0$$

特殊解

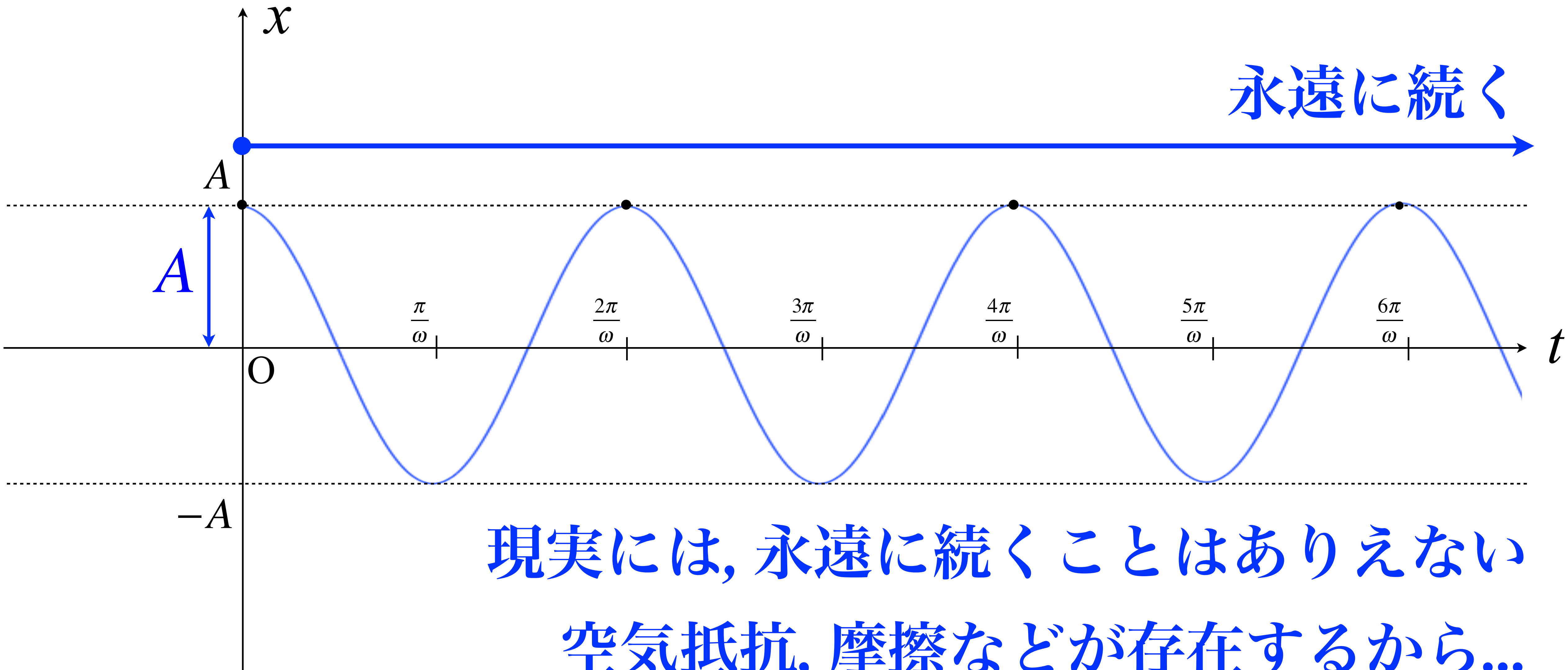
$$x(t)=A\cos\omega t$$



特殊解のすがた ⑥

- 特殊解　$x(t) = A\cos\omega t$ を描いてみる

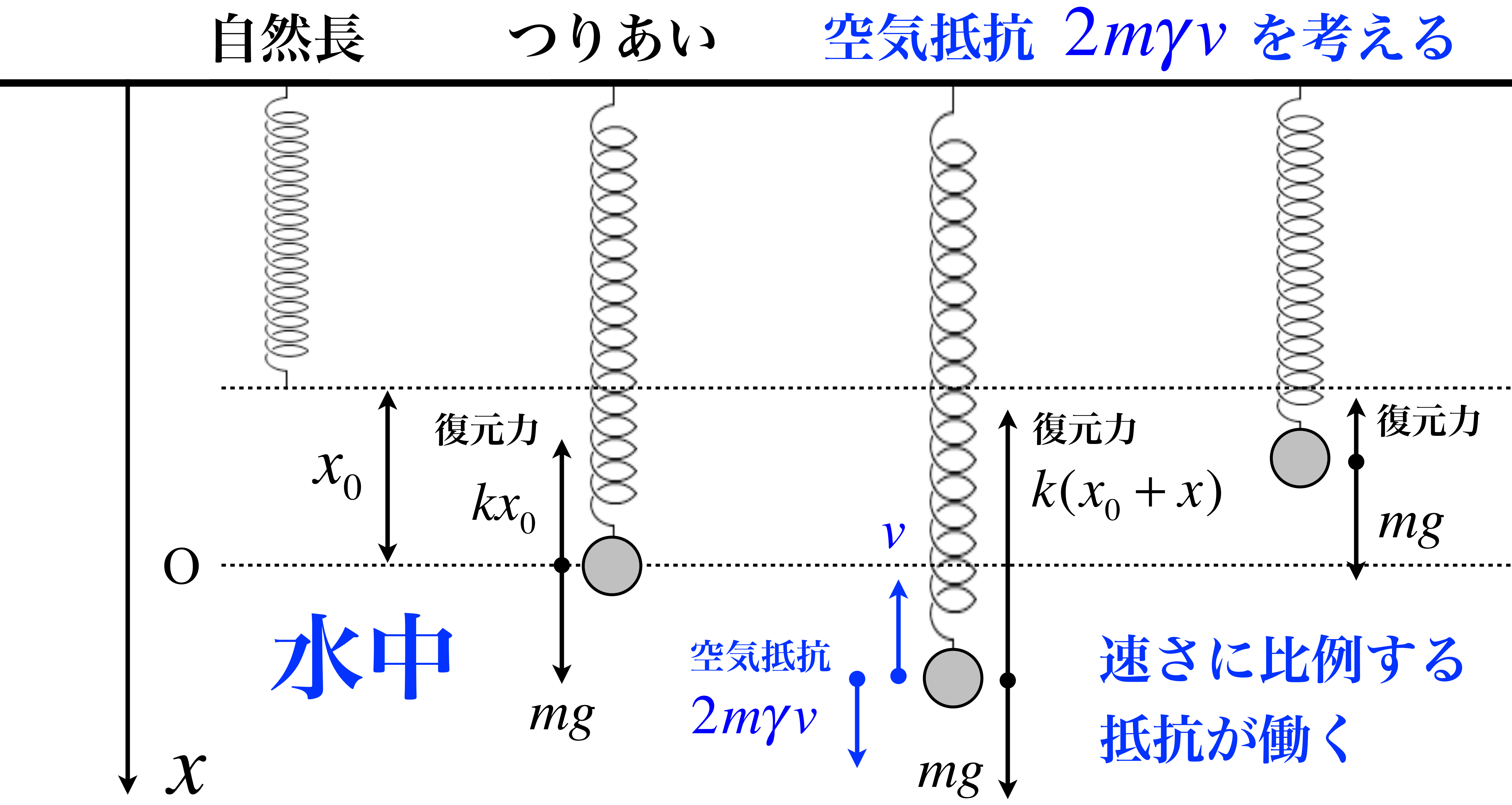
$x = A, -A$ の間を往復する**周期運動**



現実には, 永遠に続くことはありえない

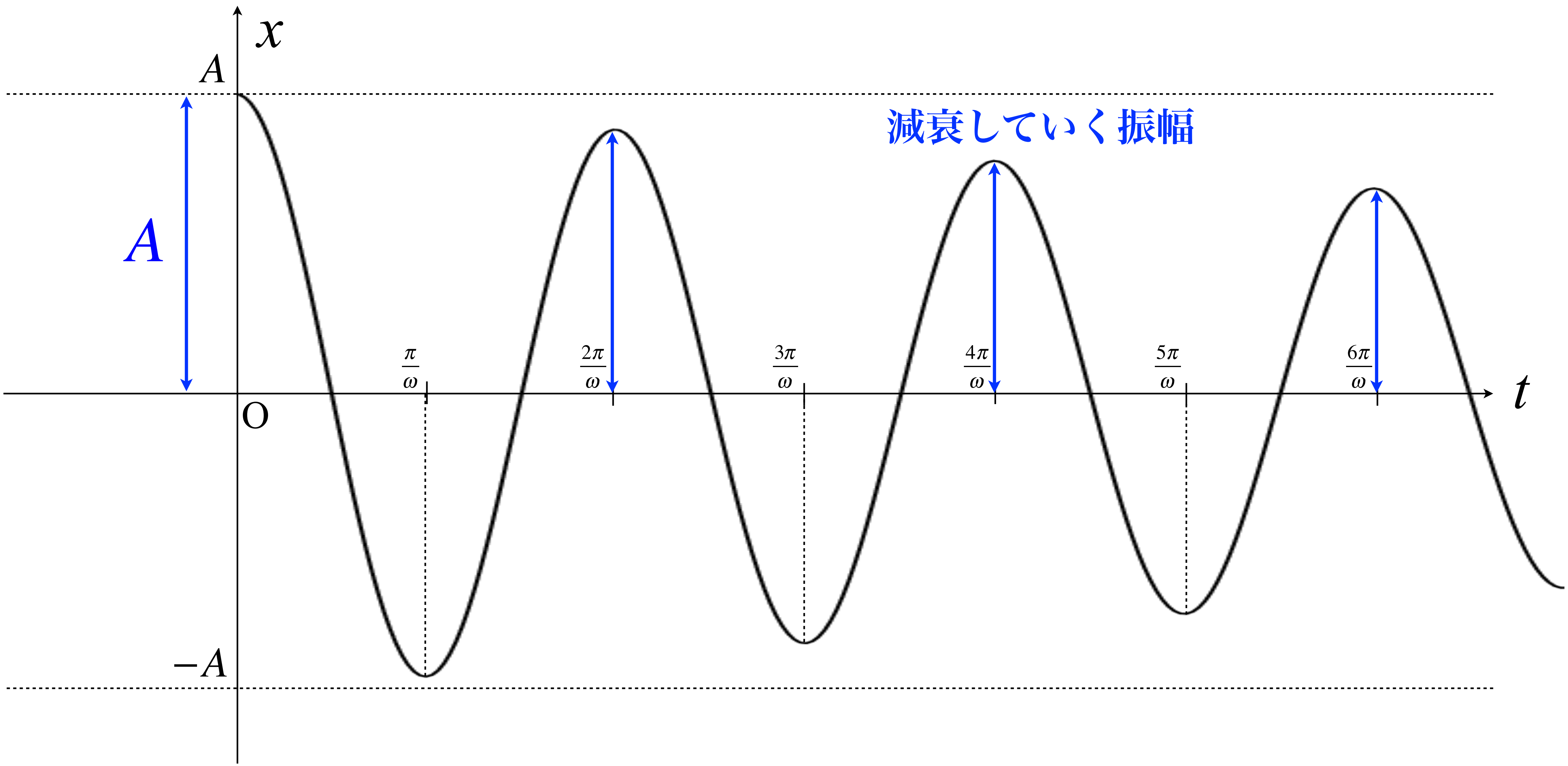
空気抵抗, 摩擦などが存在するから...

ばね振り子を水に入れる ⑦



どうなるか… ⑧

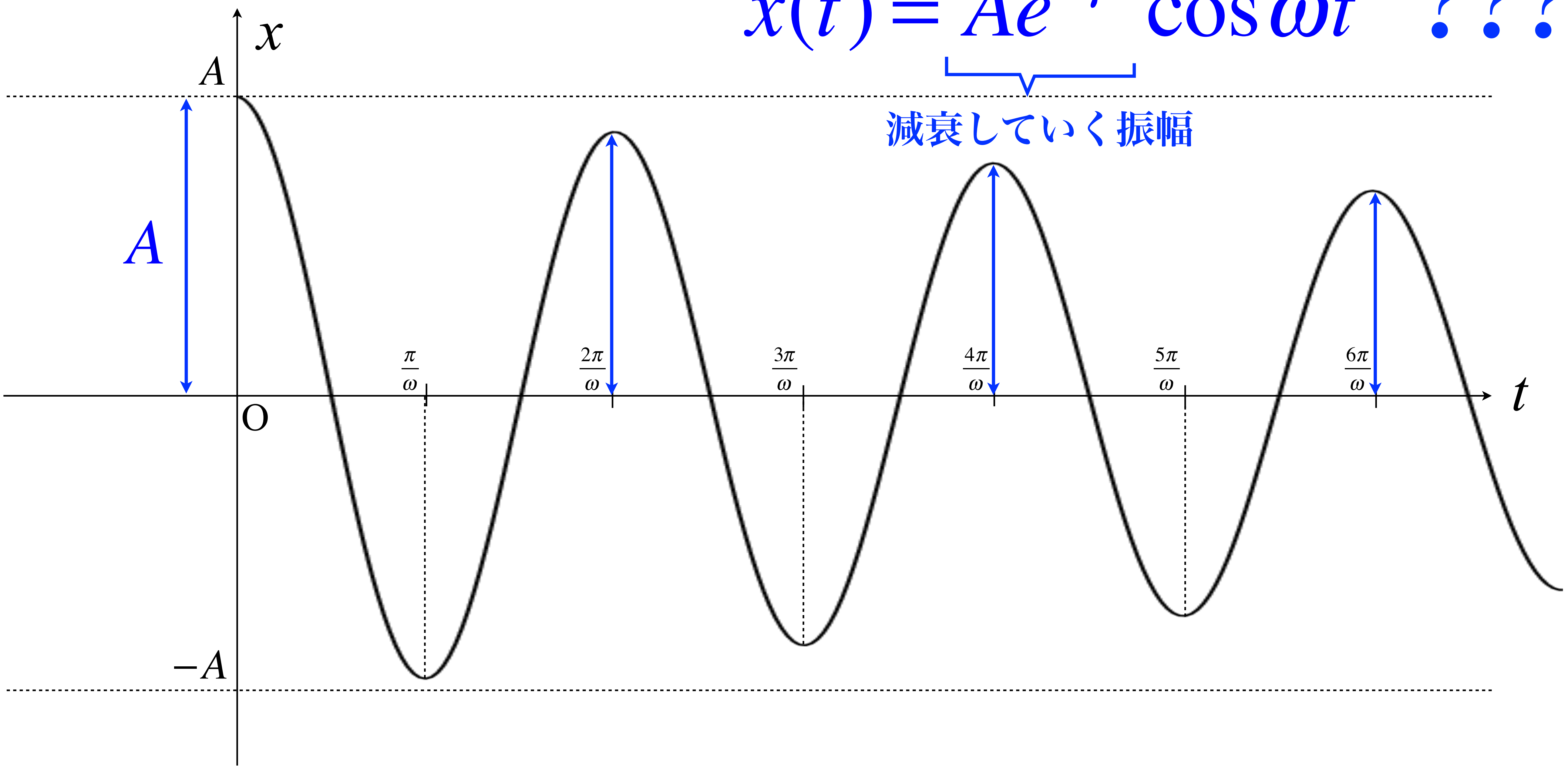
- 直感的に以下のようになりそう…



どうなるか… ⑧

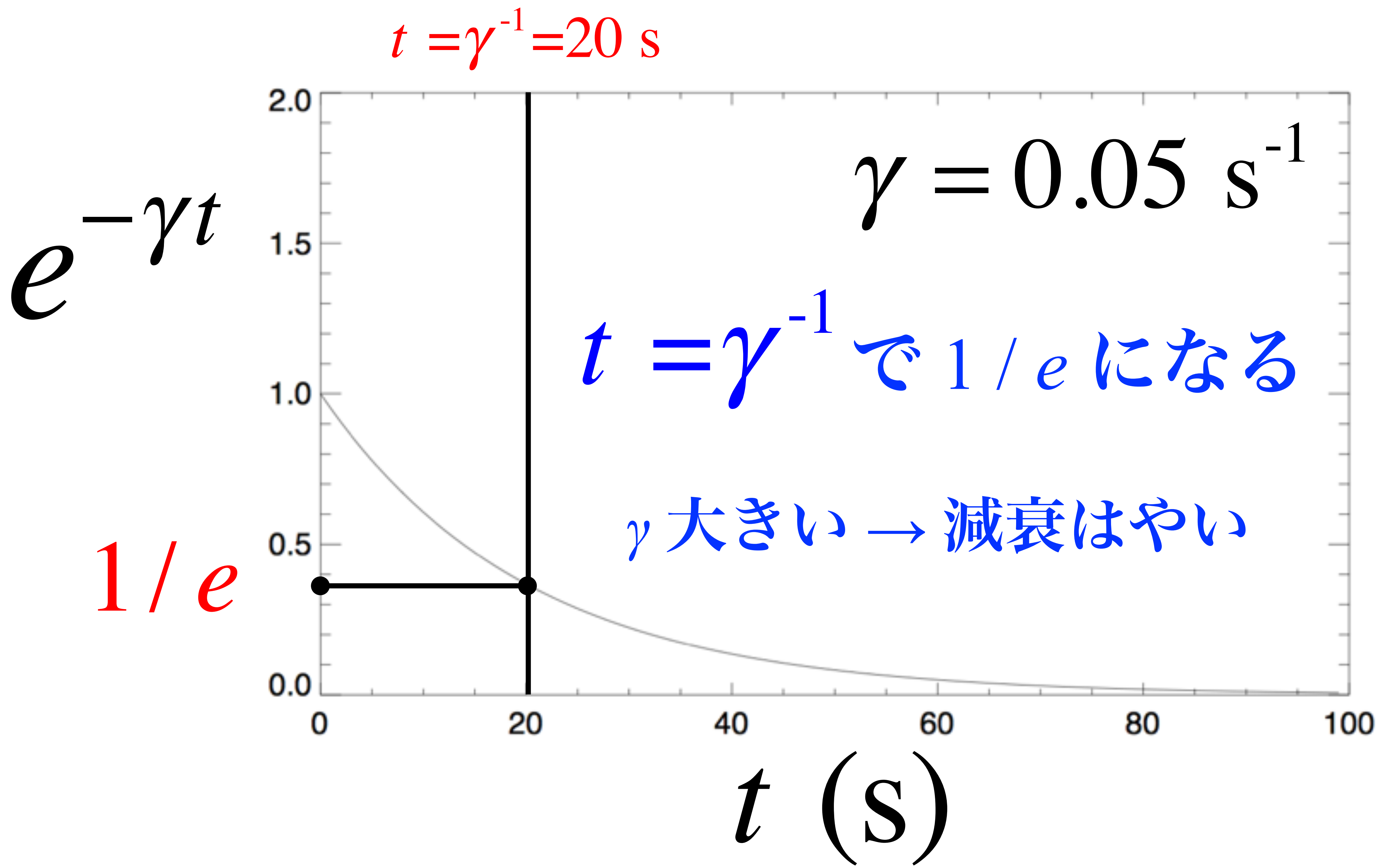
- 直感的に以下のようになりそう…

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\gamma t}}_{\text{減衰していく振幅}} \cos \omega t \quad ???$$



減衰を表す関数

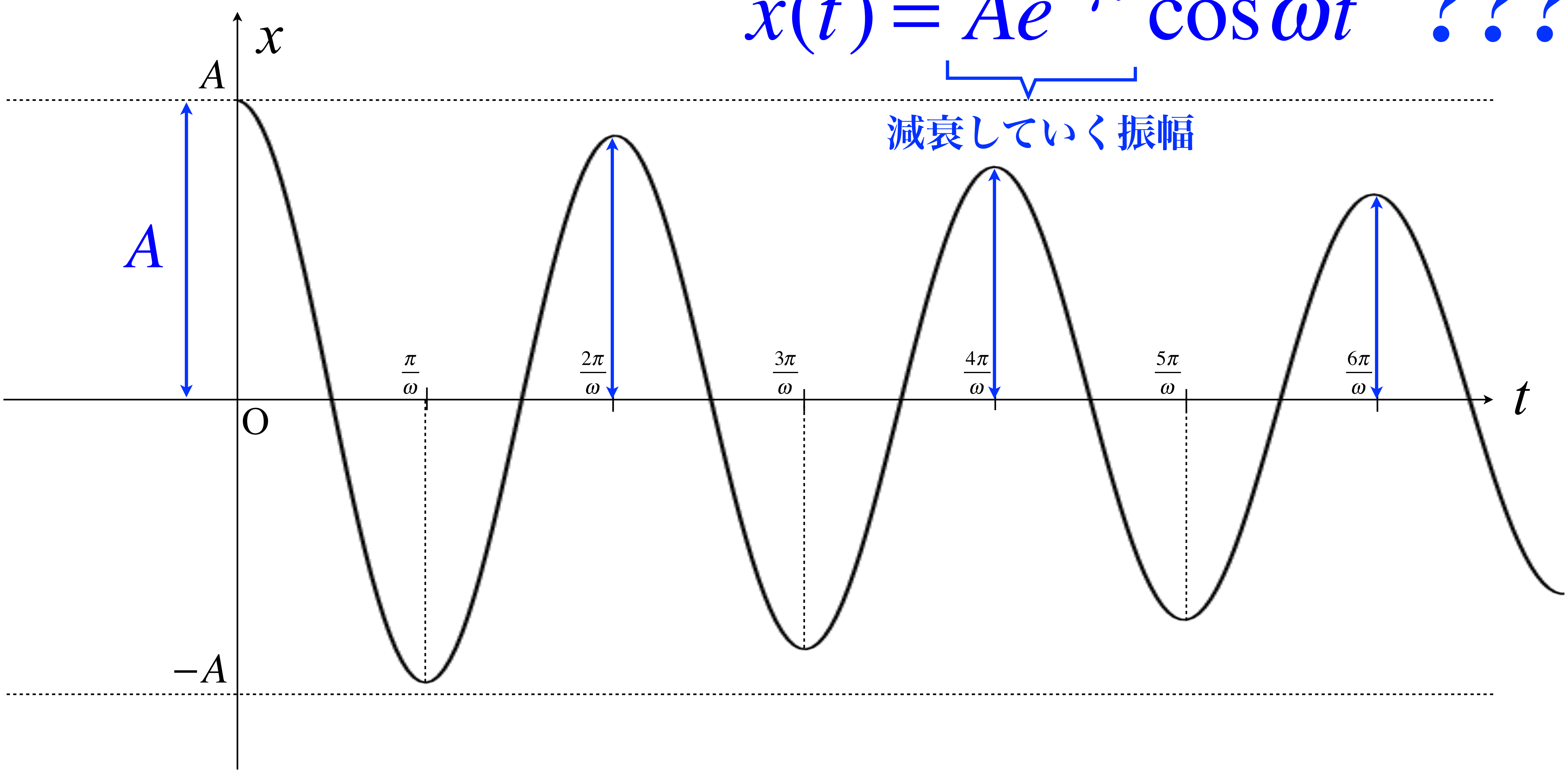
- $e^{-\gamma t}$ ってどんな形をしている？



どうなるか... ⑧

- 直感的に以下のようになりそう...

$$x(t)=\underbrace{Ae^{-\gamma t}}_{\text{減衰していく振幅}}\cos\omega t \quad ???$$



運動方程式を立ててみる ⑩

弾性力　　　空気抵抗

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma v = -kx - 2m\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

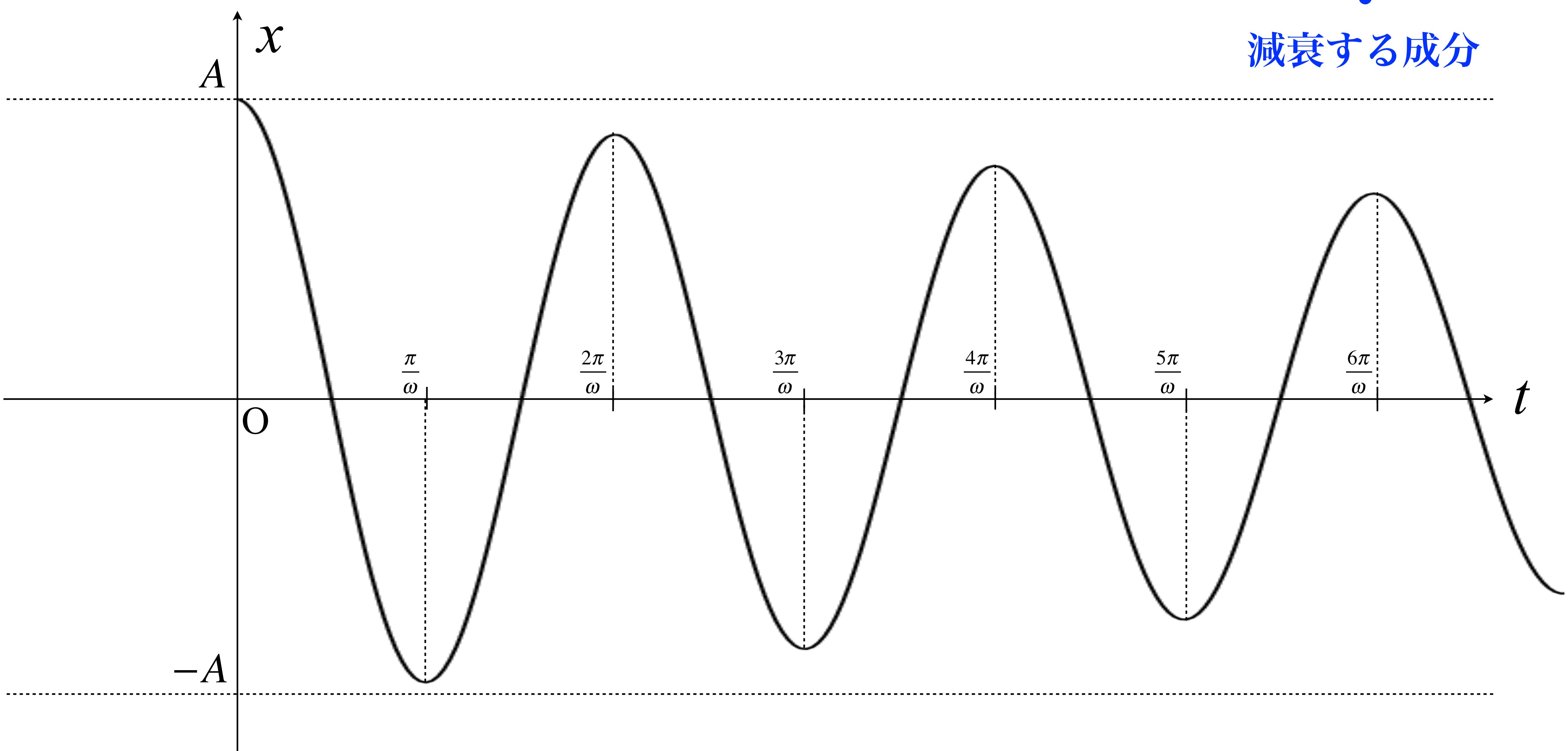
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

一般解を想像する ⑪

とりあえず時間の関数

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \longrightarrow x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$$

減衰する成分



とりあえず代入してみると ⑫

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \longleftarrow x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}e^{-\gamma t} - \gamma y e^{-\gamma t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-\gamma t} - 2\gamma\frac{dy}{dt}e^{-\gamma t} + \gamma^2 y e^{-\gamma t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - \gamma^2)y = 0$$

$y\,(t)$に関する
微分方程式

場合分けが必要

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(\omega^2-\gamma^2)y=0$$

正の場合　$\omega > \gamma$

零の場合　$\omega = \gamma$

負の場合　$\omega < \gamma$

正の場合: $\omega > \gamma$ ⑭

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - \gamma^2)y = 0$$

正の値

単振動の微分方程式

$$p = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -p^2 y$$

$y\,(t)$ の一般解は,

$$y(t) = A\cos(pt + \theta_0)$$

正の場合: $\omega > \gamma$ ⑮

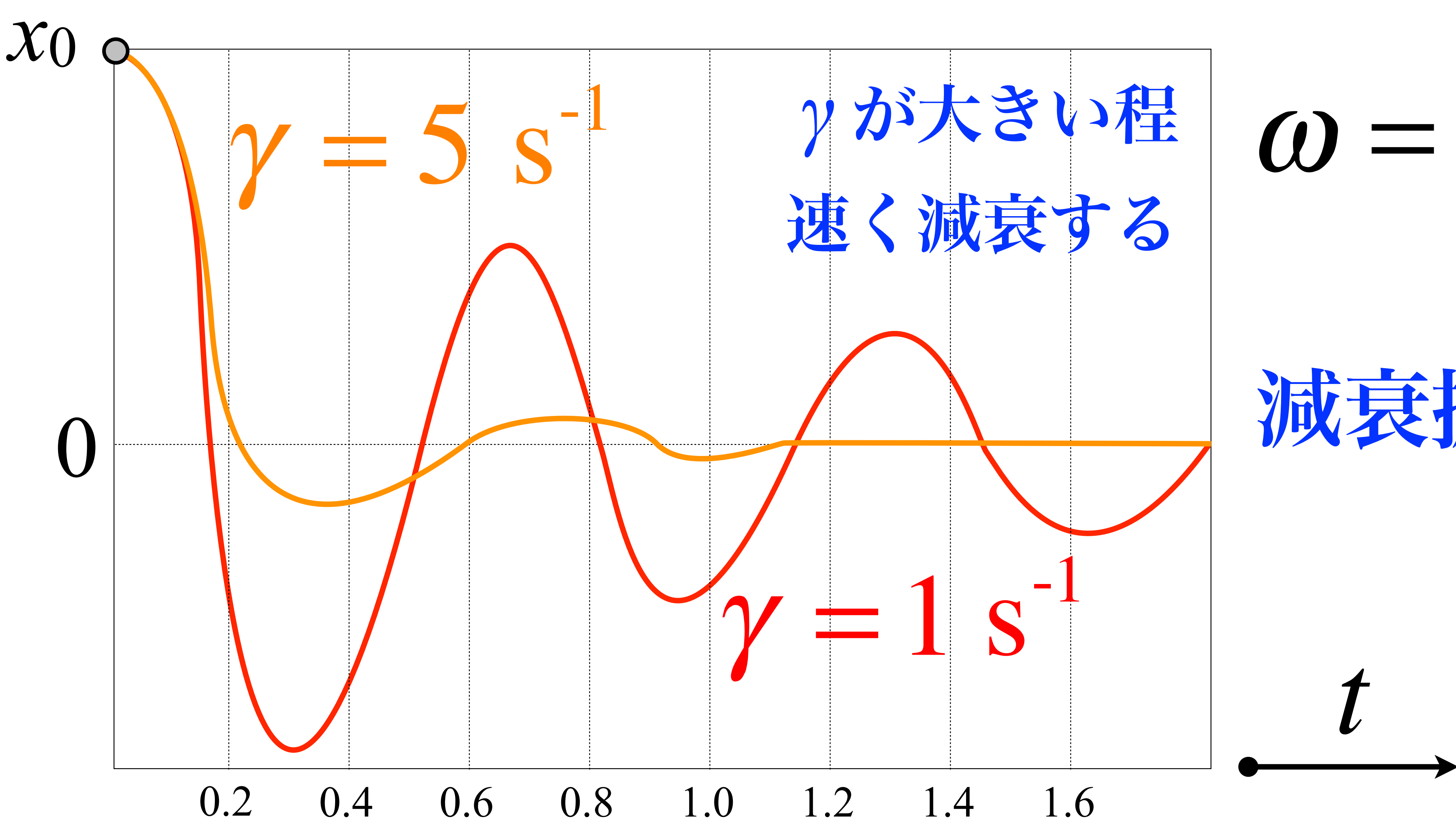
- $x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$ であることを考えると,

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\gamma t}}_{\text{減衰していく振幅}} \underbrace{\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \theta_0)}_{\text{角振動数 } \sqrt{\omega^2-\gamma^2} \text{ の周期振動}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

グラフで表現すると

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\,t + \theta_0)$$



γ が大きい程
速く減衰する

$\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$

減衰振動

零の場合: $\omega = \gamma$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \underbrace{(\omega^2 - \gamma^2)}_{0} y = 0$$

2 階微分が 0

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$y\,(t)$ の一般解は,

$$y(t) = A + Bt$$

零の場合: $\omega = \gamma$

- $x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$ であることを考えると,

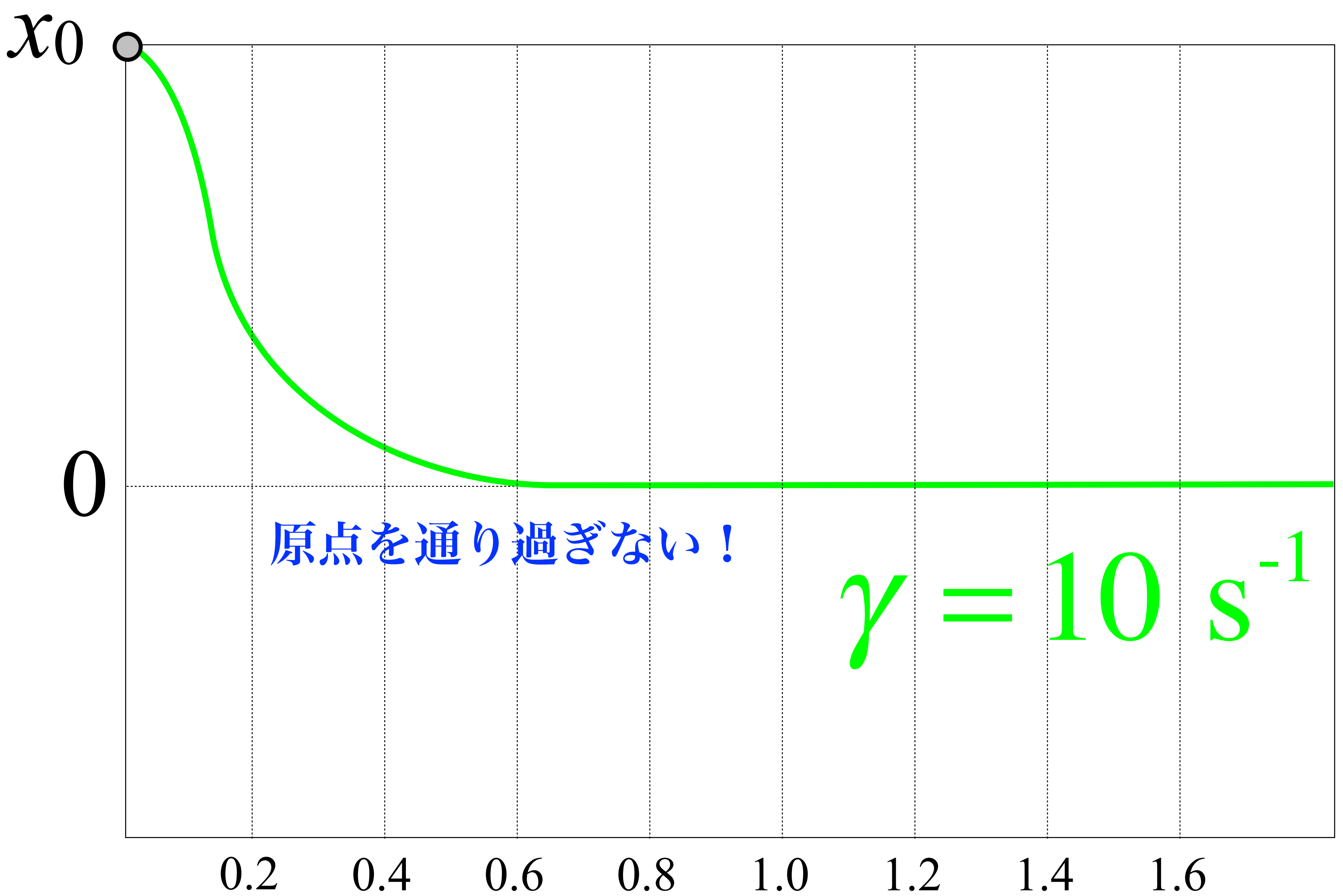
$$x(t) = \underbrace{(A + Bt)}_{1\text{次関数}} e^{-\gamma t}$$

減衰していく関数

グラフで表現すると ⑲

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

抵抗によって
振動が無くなる



$\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$

臨界減衰

t

負の場合: $\omega < \gamma$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\omega^2 - \gamma^2) y = 0$$

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \longrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = q^2 y$$

単振動ではない！

代入してみると分かる

$y\,(t)$ の一般解は,

$$y(t) = Ae^{qt} + Be^{-qt}$$

負の場合: $\omega < \gamma$

- $x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$ であることを考えると,

$$x(t) = [Ae^{qt} + Be^{-qt}]\, e^{-\gamma t}$$

$$= Ae^{-\underbrace{(\gamma - q)}_{\text{正の値}}t} + Be^{-\underbrace{(\gamma + q)}_{\text{正の値}}t}$$

どちらの項も
減衰していく関数

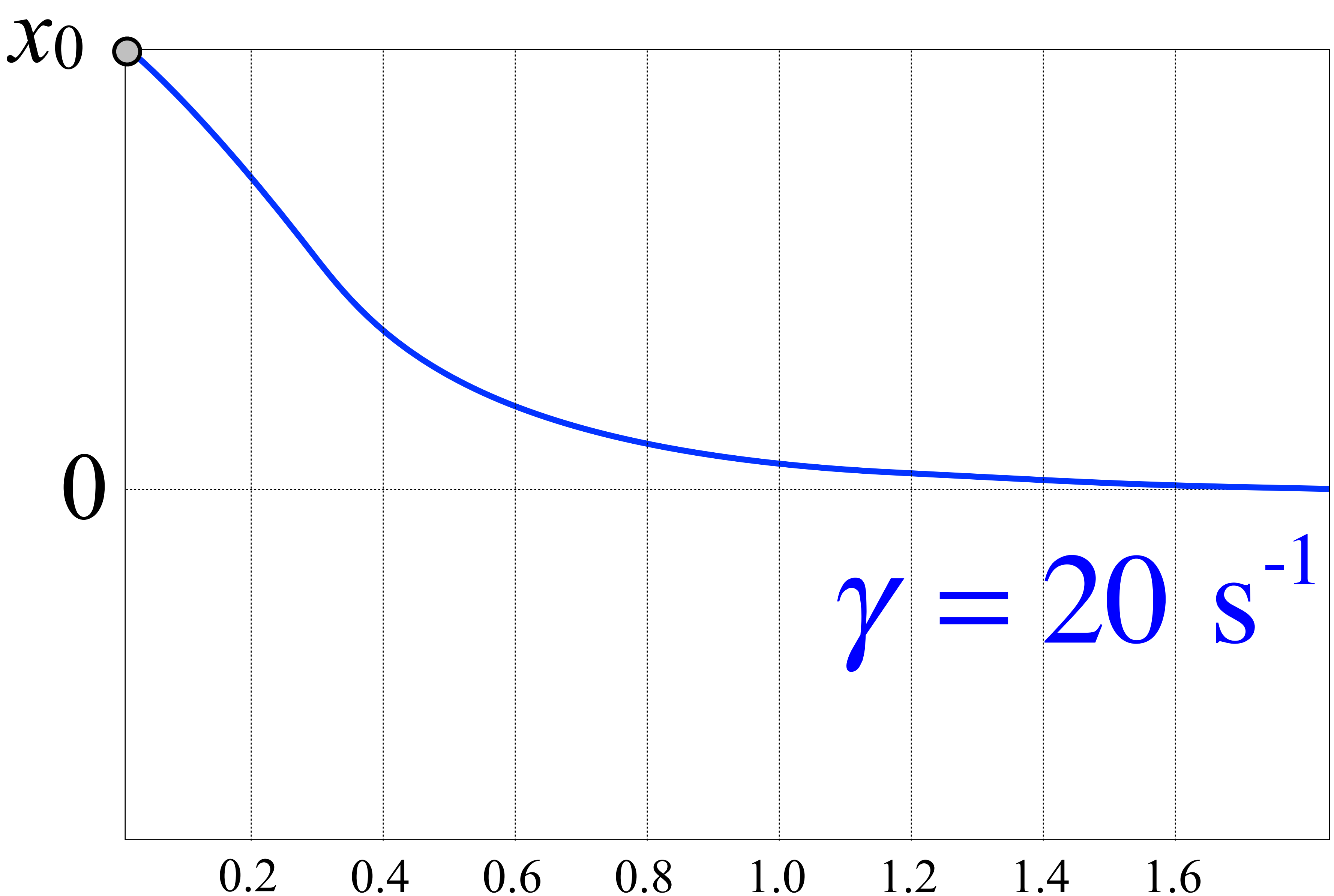
$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ であることを考えると,

$$\gamma - q > 0$$

グラフで表現すると

$$x(t) = Ae^{-(\gamma - q)t} + Be^{(\gamma - q)t}$$

抵抗が大きすぎて,
ゆっくり減衰



$\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$

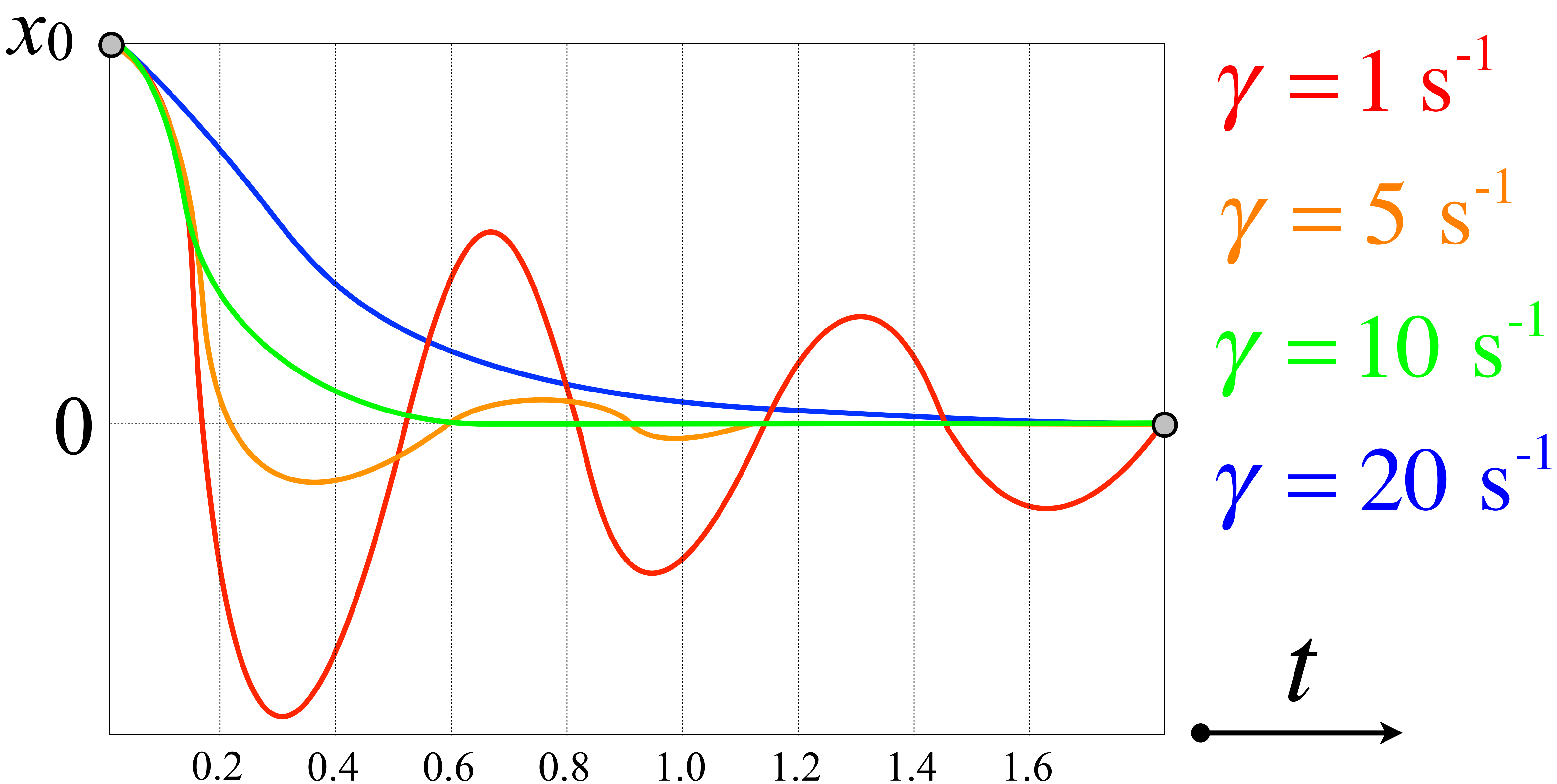
過減衰

t

全部重ね合わせると

減衰振動　臨界減衰　過減衰

$\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$



実例 - ドアクローザ

- 空気ばねの復元力
- 油の粘性抵抗を利用した減衰装置により臨界減衰