

物理学概論第一

第 13 回

波動のパート講義計画

第 10 回: 波動 ① - 波の性質

第 11 回: 波動 ② - 波動方程式, 重ね合わせの原理

第 12 回: 波動 ③ - 波面, 反射の法則, 屈折の法則

第 13 回: 波動 ④ - 反射波の位相, 定在波

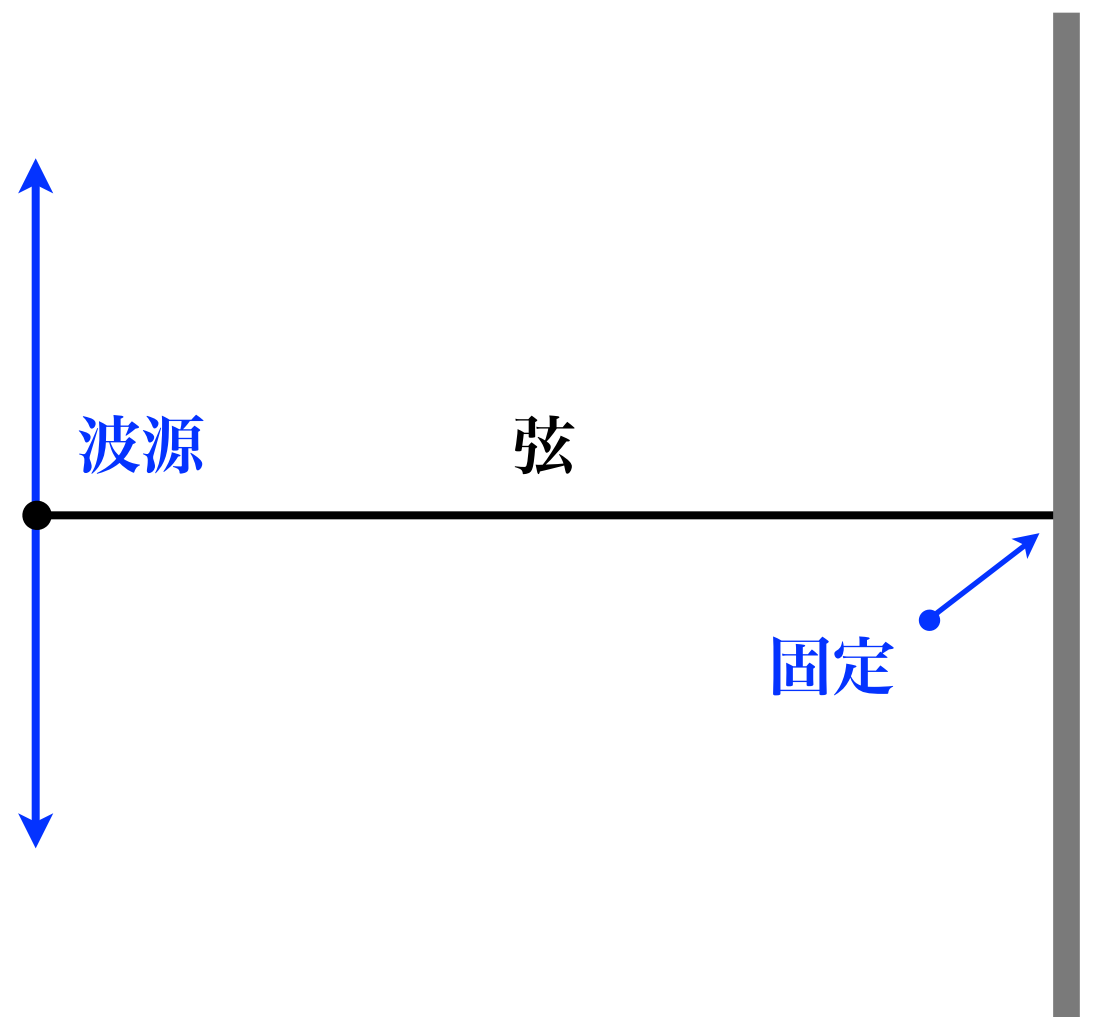
期末試験 (7/31 木曜日)

波の反射 - 固定端と自由端

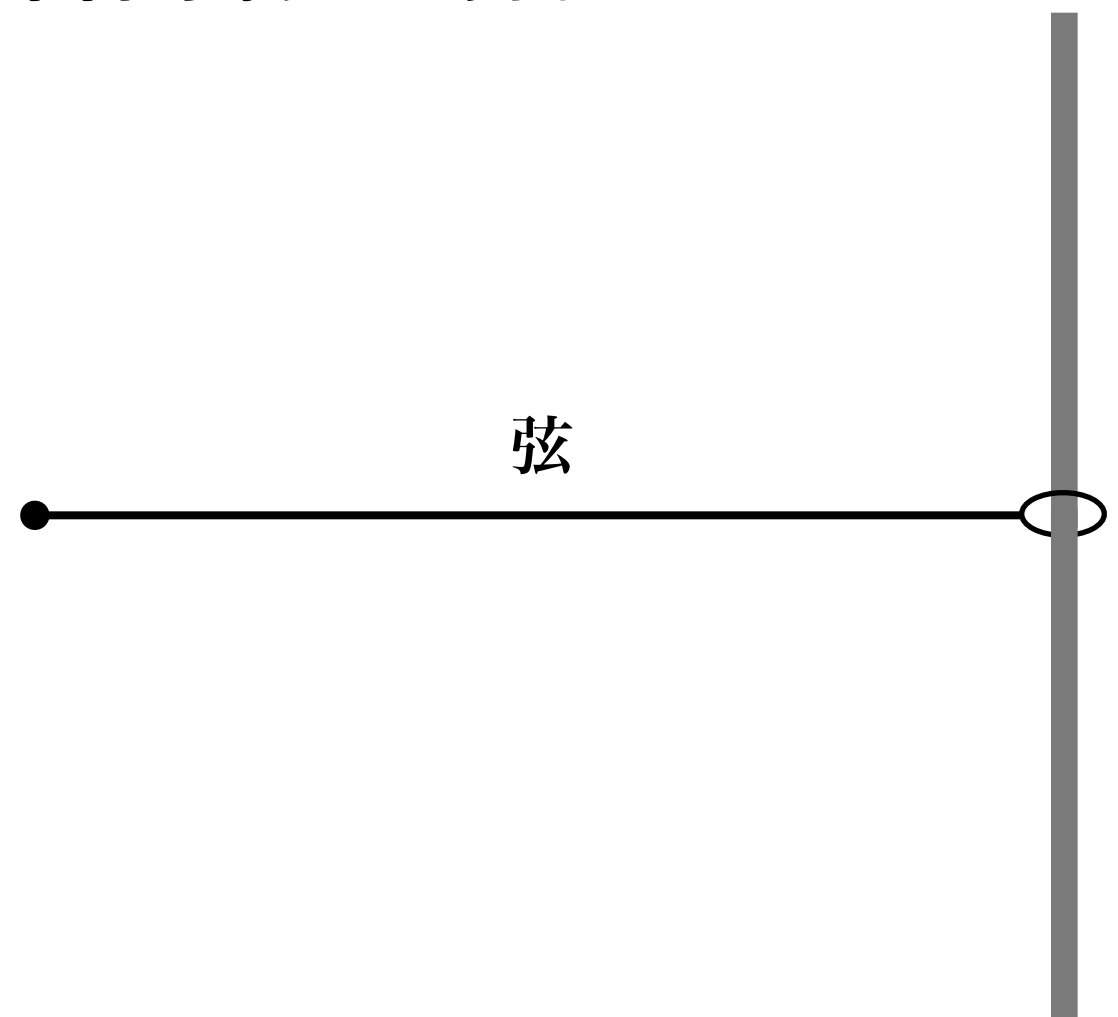
②

- 反射波の位相は, 境界面の性質により変わる
- 右端を棒に取り付けた弦の左端を横に振動

固定端の場合



自由端の場合

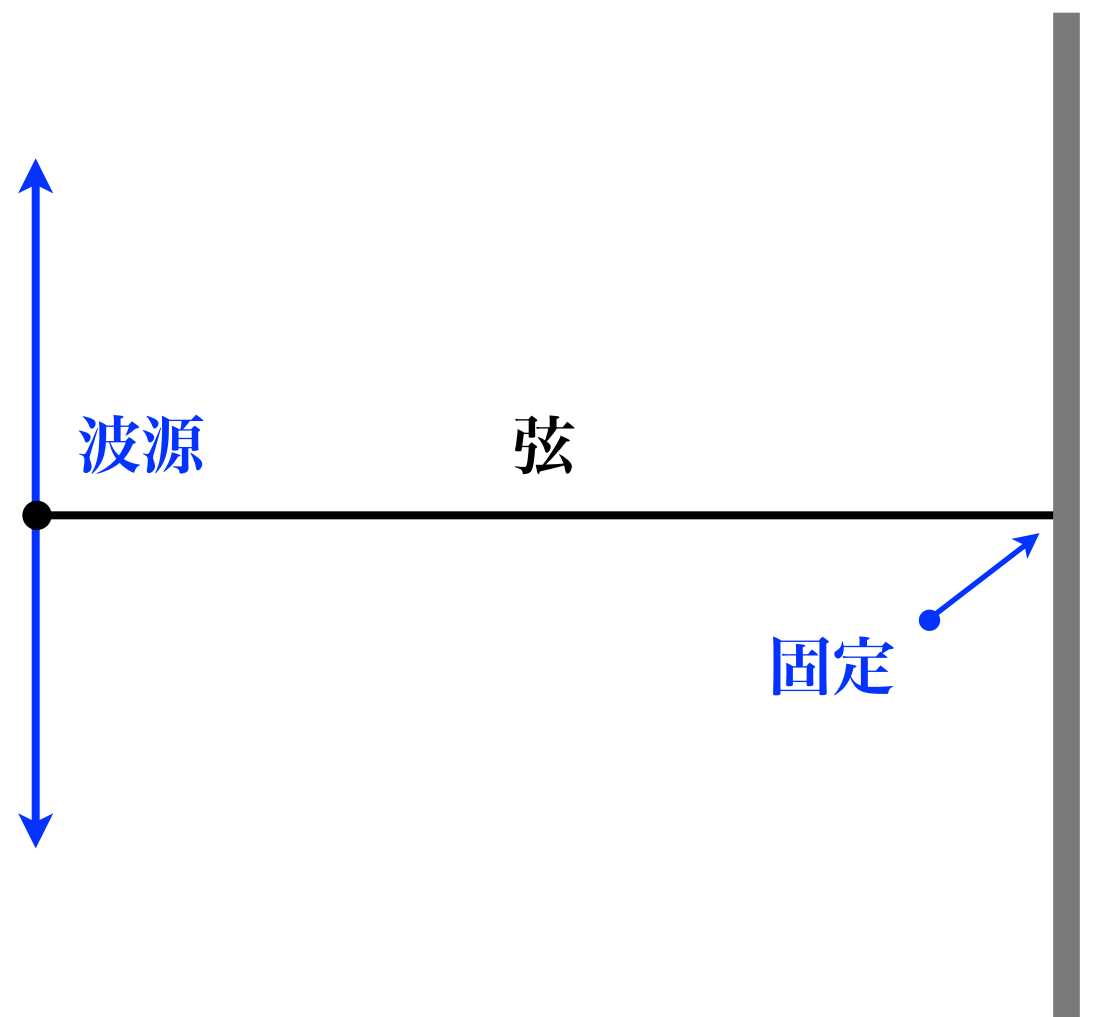


波の反射 - 固定端と自由端

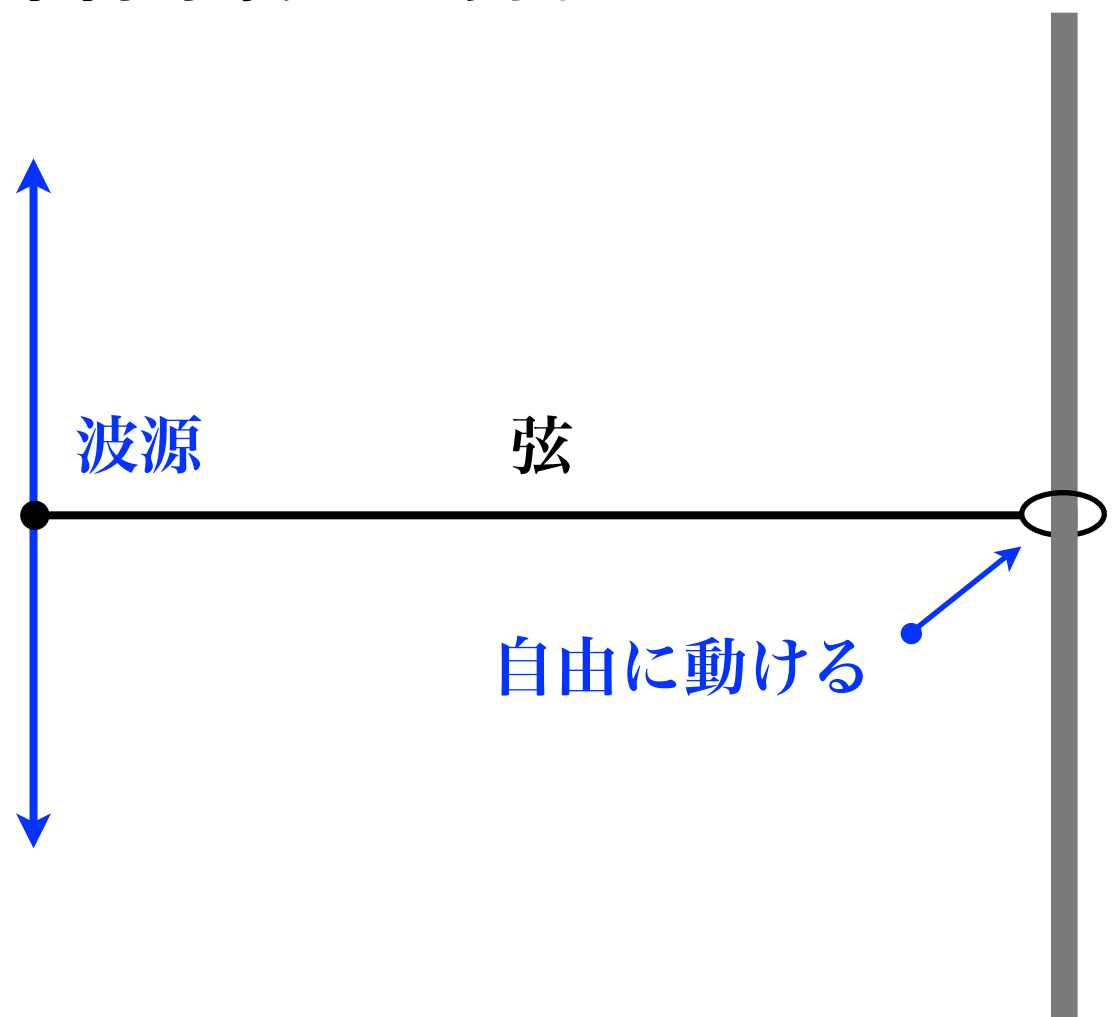
②

- 反射波の位相は, 境界面の性質により変わる
- 右端を棒に取り付けた弦の左端を横に振動

固定端の場合



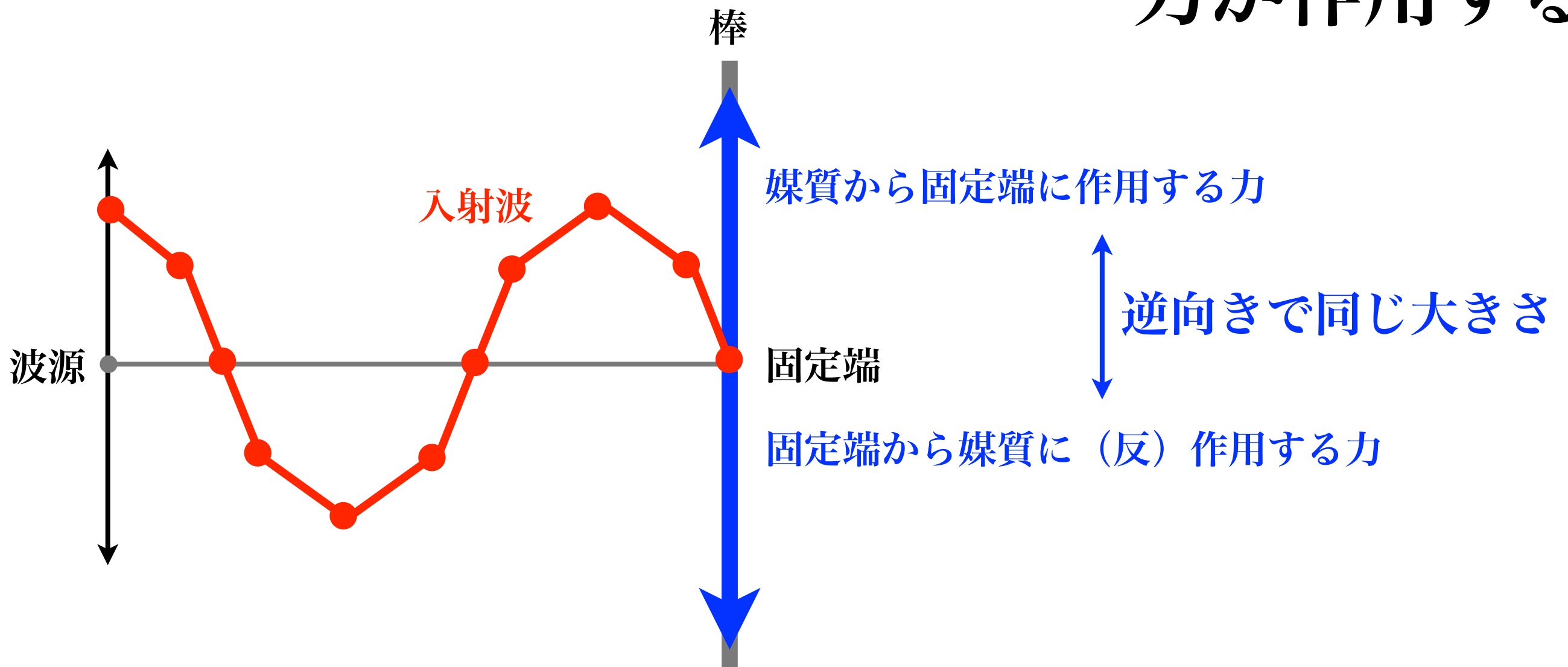
自由端の場合



固定端から考えてみる

③

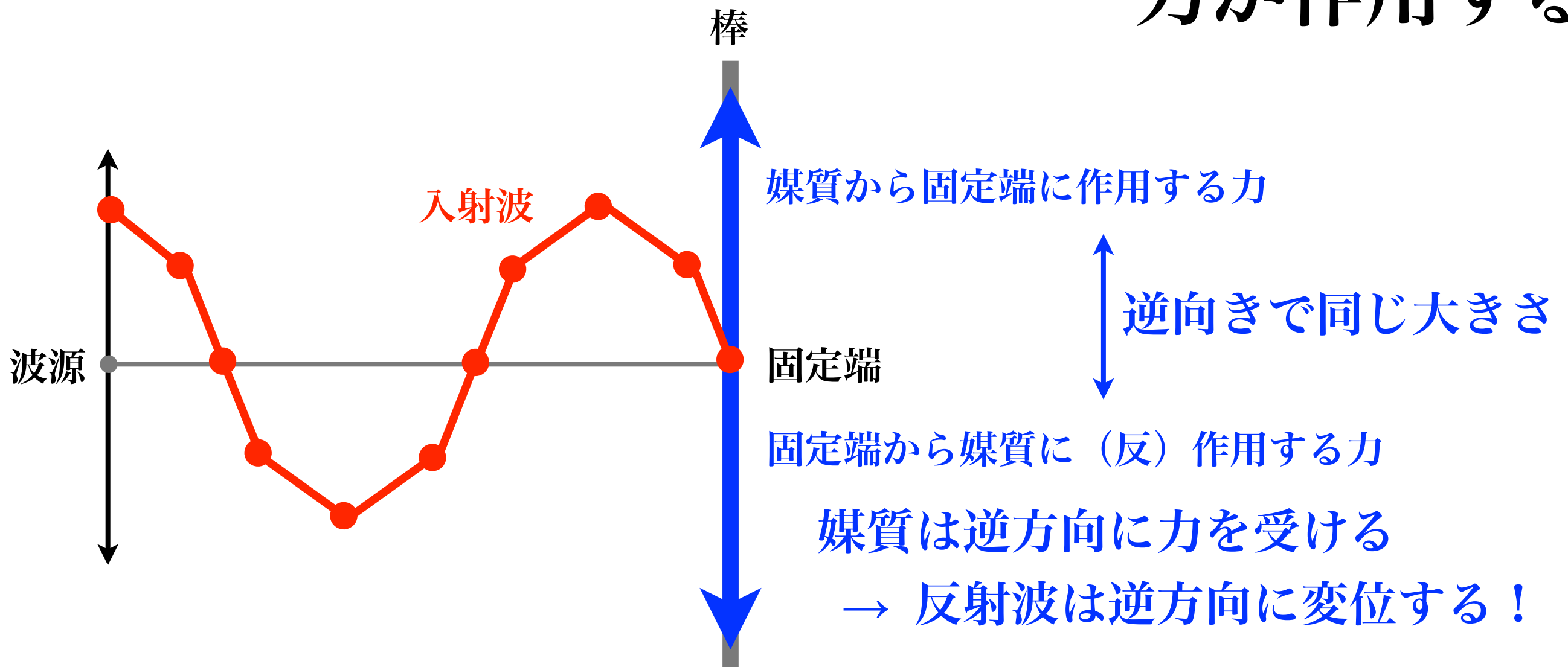
- 波が入射すると、媒質から固定端に力が作用
- 固定端は不動 → 固定端から媒質に逆向きの力が作用する



固定端から考えてみる

③

- 波が入射すると、媒質から固定端に力が作用
- 固定端は不動 → 固定端から媒質に逆向きの力が作用する



固定端での変位を考える

④

- 入射波 $A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ → 反射波 $B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

 x 正の向きに進行

合成波 $y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

- 固定端を $x = 0$ とすると, そこでの変位は 0

$$y(0, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} + B \sin 2\pi \frac{t}{T} = 0$$

固定端での変位を考える

④

- 入射波 $A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ $\rightarrow$ 反射波 $B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

 x 正の向きに進行 x 負の向きに進行

合成波 $y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

- 固定端を $x = 0$ とすると, そこでの変位は 0

$$y(0, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} + B \sin 2\pi \frac{t}{T} = 0$$

固定端での変位を考える

④

- 入射波 $A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ $\rightarrow$ 反射波 $B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

 x 正の向きに進行 x 負の向きに進行

$$\text{合成波 } y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

“境界条件”

- 固定端を $x = 0$ とすると, そこでの変位は 0

$$y(0, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} + B \sin 2\pi \frac{t}{T} = 0$$

固定端での変位を考える

④

- 入射波 $A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ $\rightarrow$ 反射波 $B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

 x 正の向きに進行 x 負の向きに進行

$$\text{合成波 } y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

“境界条件”

- 固定端を $x = 0$ とすると, そこでの変位は 0

$$y(0, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} + B \sin 2\pi \frac{t}{T} = 0 \longrightarrow B = -A$$

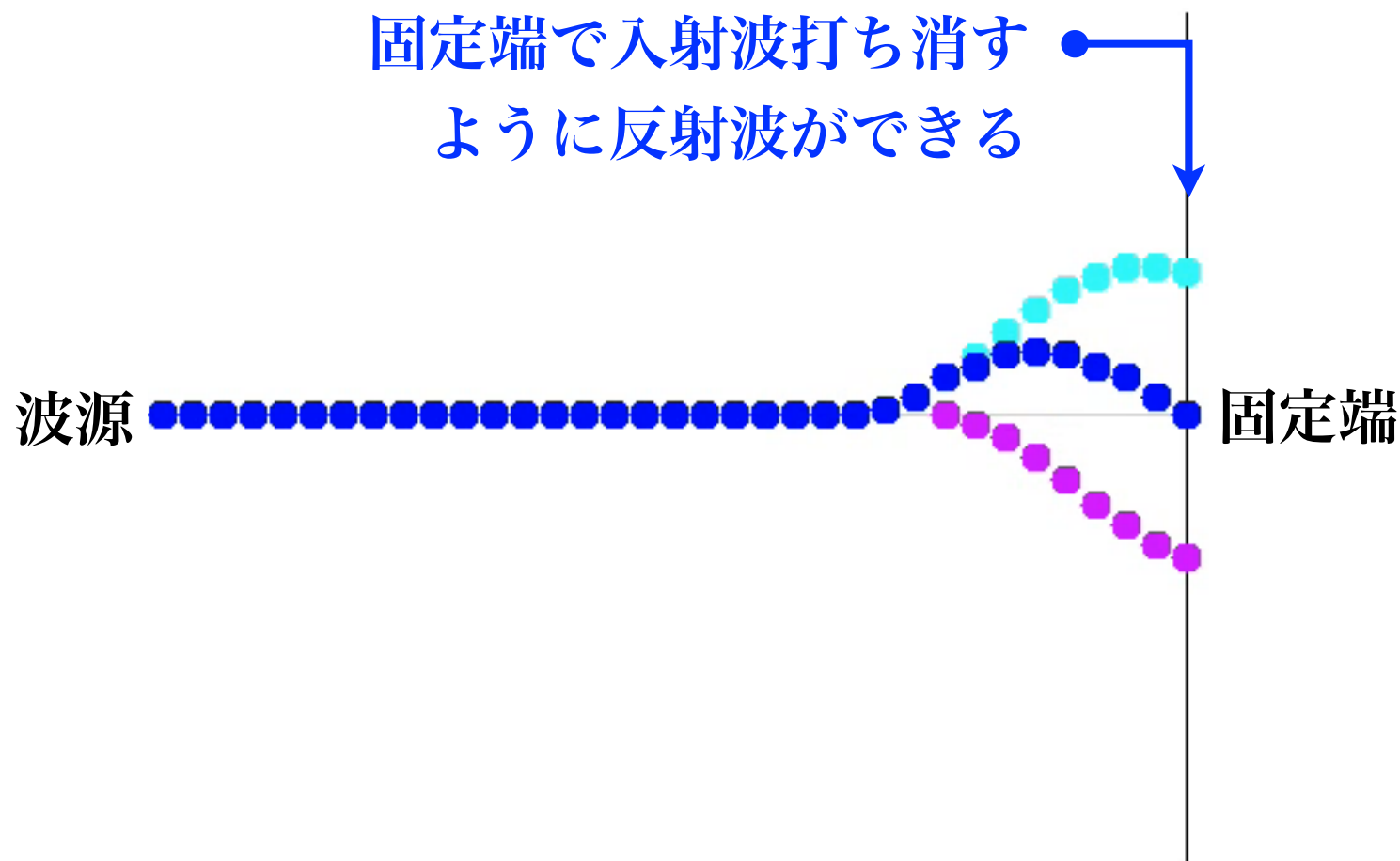
固定端からの反射波は？

5

- 結局, 固定端における反射波は

$$B = -A \quad \longrightarrow \quad B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

固定端で入射波打ち消す
ように反射波ができる



入射波

$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

- 合成波 = 反射波 + 入射波
- 入射波
- 反射波

逆向きに進行 & 位相が変化

$$B = -A \quad \bullet \longrightarrow \quad B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = \overset{\downarrow}{-} A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \overset{\downarrow}{+} \frac{x}{\lambda} \right)$$

入射波

入射波

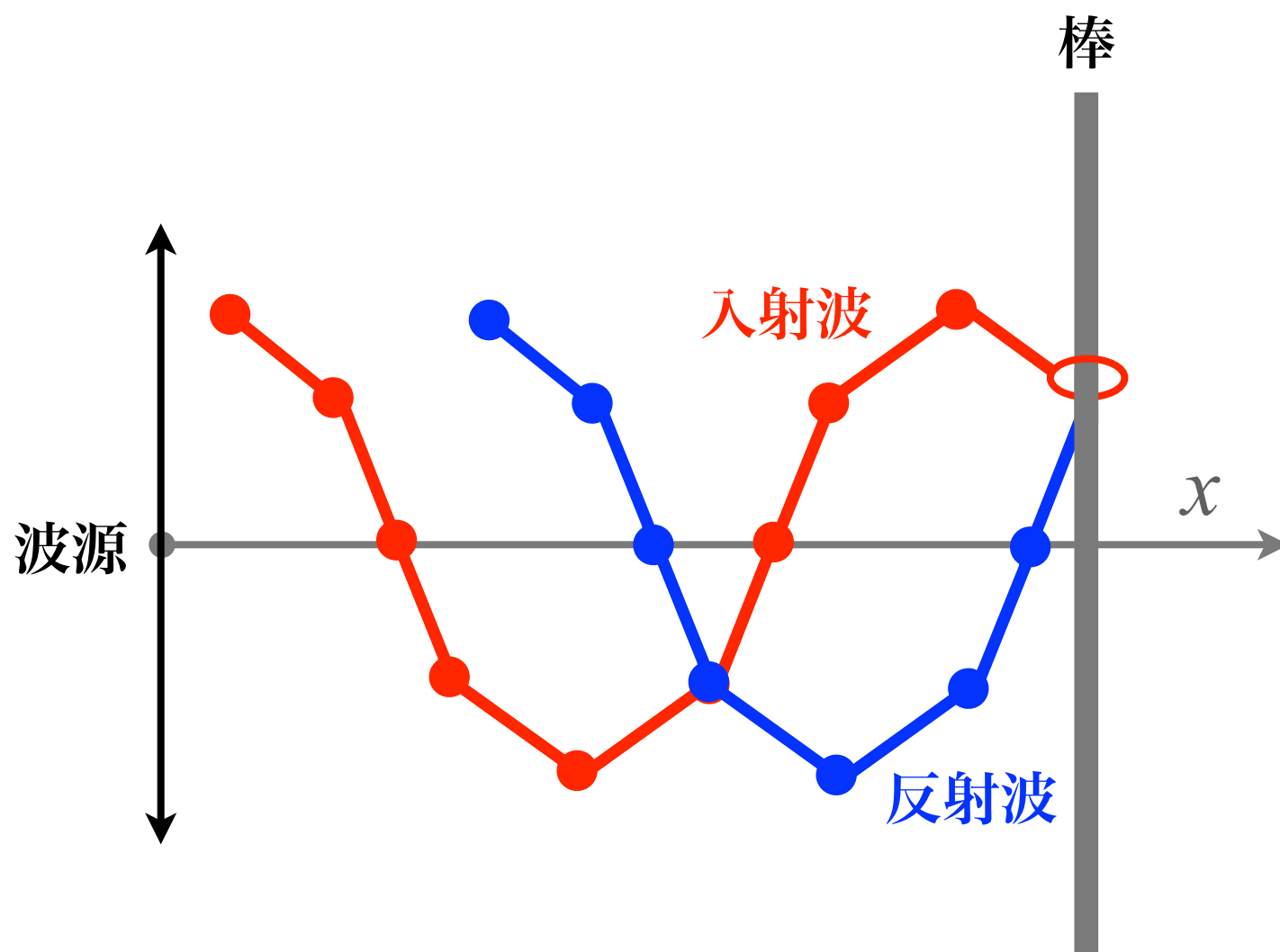
$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

- 合成波 = 反射波 + 入射波
- 入射波
- 反射波

次は自由端

6

- 波が入射すると, 自由端は“自由”に運動
- つまり反射波と入射波と同位相で振動する



反射波 (x 軸負の向きに進行)

$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

入射波 (x 軸正の向きに進行)

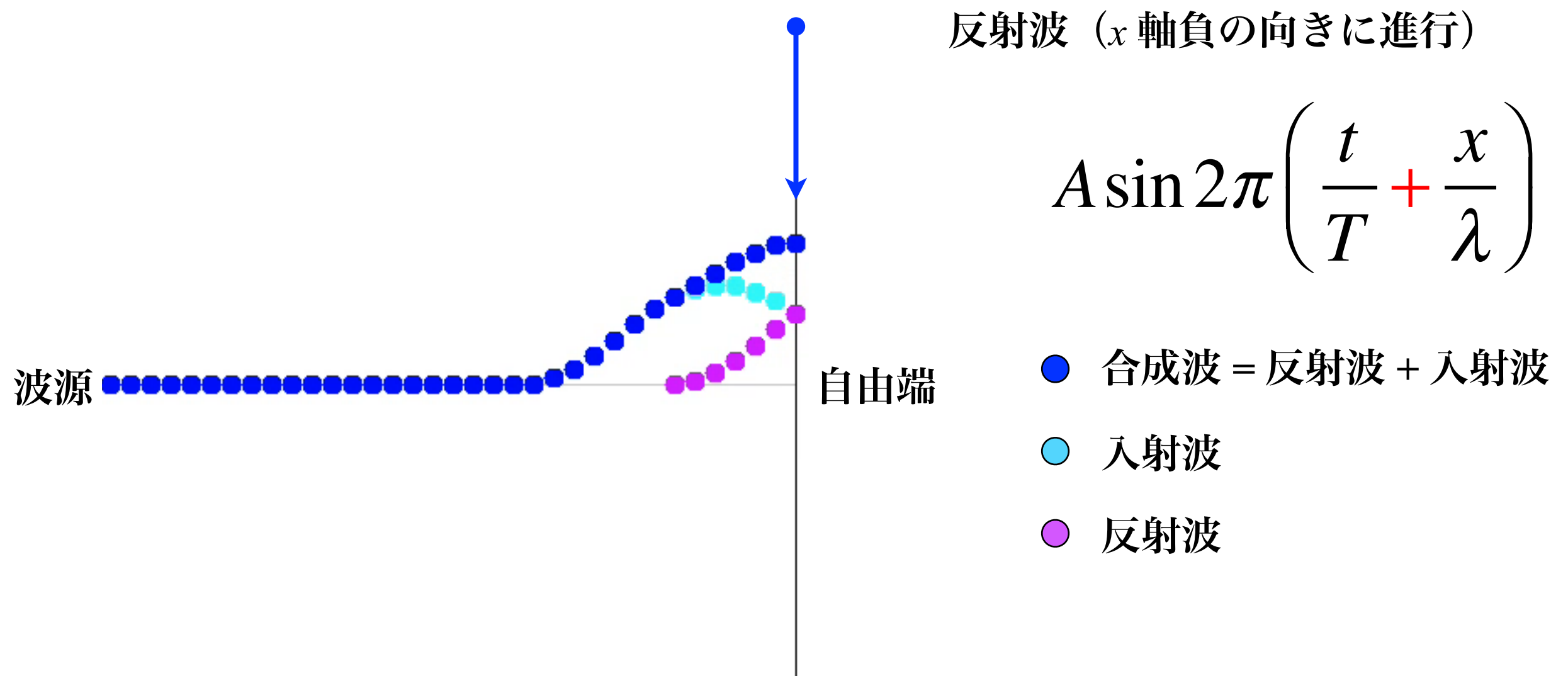
$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

自由端からの反射波は？

7

- 反射波の位相は保存, x 負の方向に進行する

自由端で, 入射波と反射波がそのまま繋がっているようなイメージ

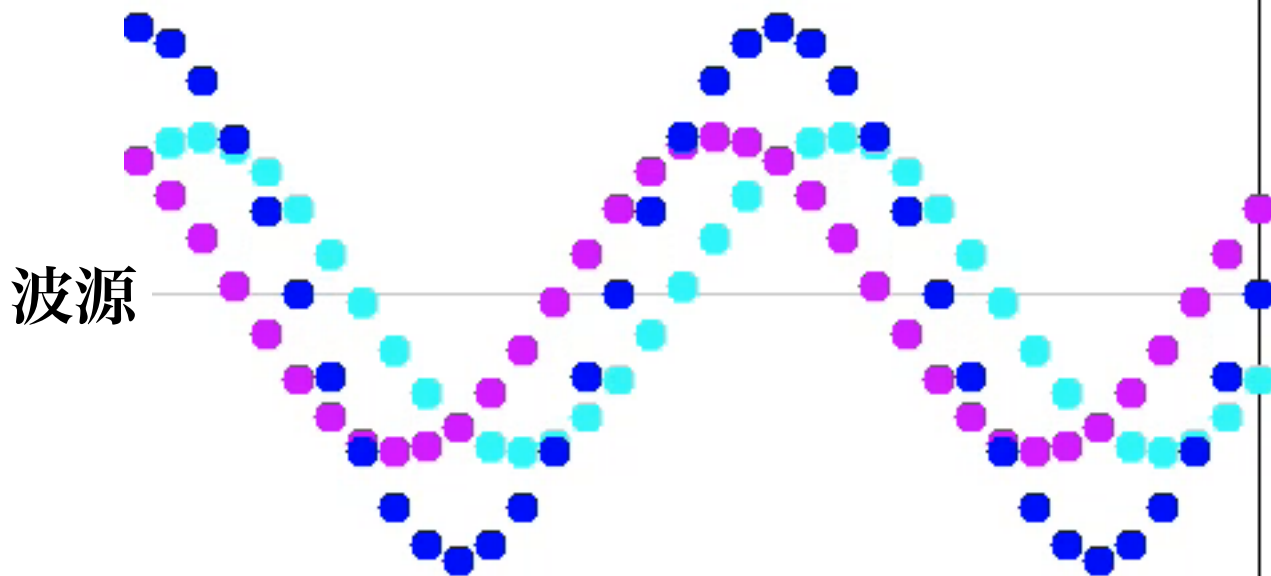


連続的な波の反射の様子

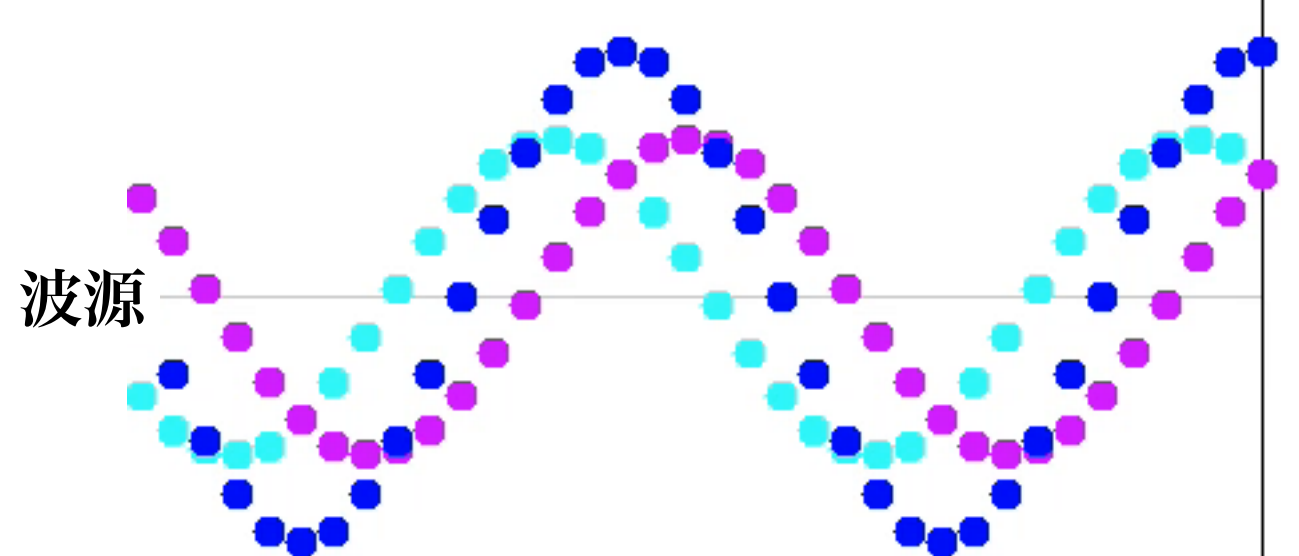
8

- 波長も f も λ も等しい正弦波が反対に進行
- 場所によって決まった振幅で振動, 進まない!

固定端



自由端



- 合成波 = 反射波 + 入射波
- 入射波
- 反射波

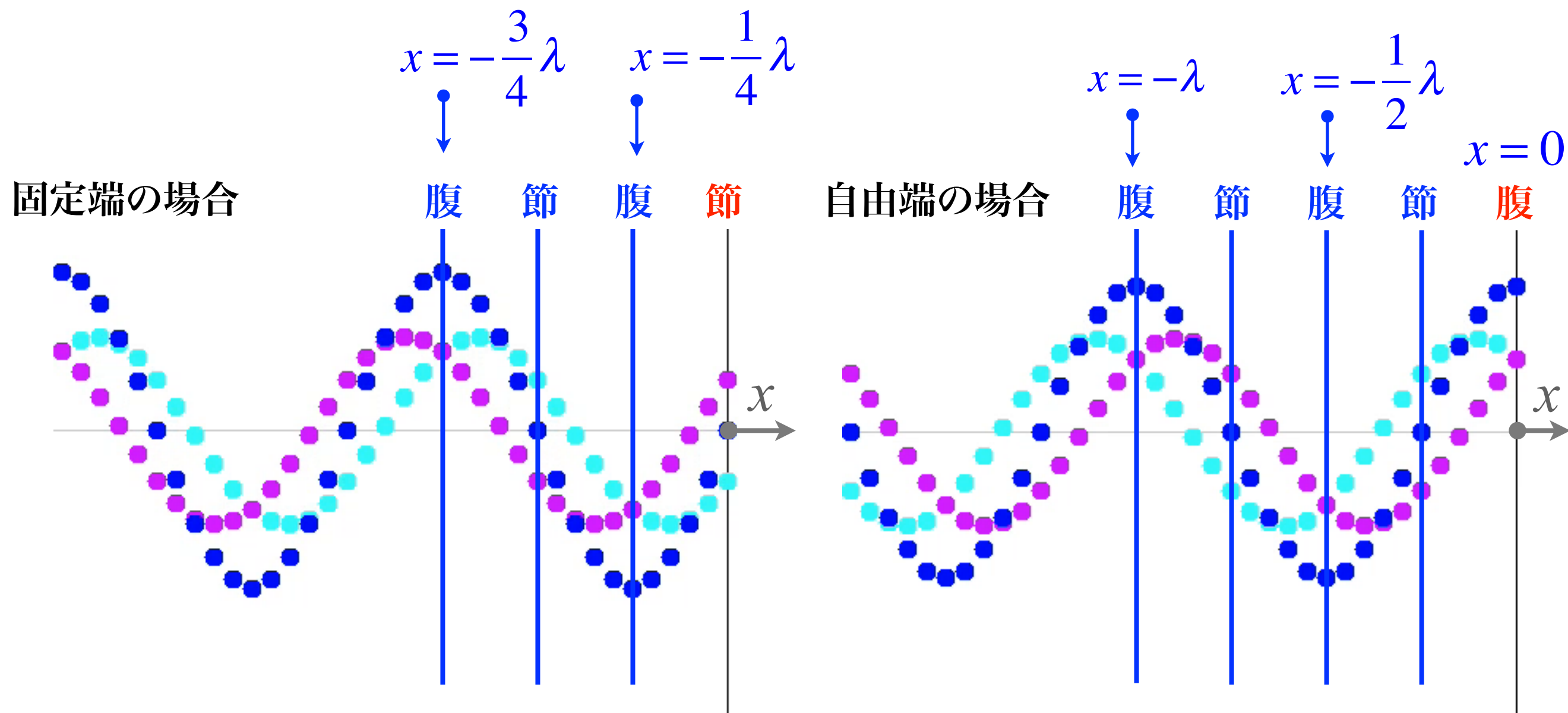
定在波 or 定常波

波というよりも振動に近いイメージ

定在波の腹と節

9

- 振幅最大の場所を腹, 全く振動しない点を節
- 固定端は節, 自由端は腹になる



定在波の数学的導出

10

• 入射波と反射波を 和積公式 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ で合成

固定端 入射波 反射波 場所の関数 振幅

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = -2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

“腹”

$$\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \text{ が最大, } 2\pi \frac{x}{\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \longrightarrow x = \frac{2n+1}{4} \lambda$$

単振動
 $\cos \omega t$
 $\sin \omega t$

自由端

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = +2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \text{ が最大, } 2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi \longrightarrow$$

定在波の腹と節

9

- 振幅最大の場所を腹, 全く振動しない点を節
- 固定端は節, 自由端は腹になる

$$x = \frac{2n+1}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{3}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{1}{4}\lambda$$

$$x = -\lambda$$

$$x = -\frac{1}{2}\lambda$$

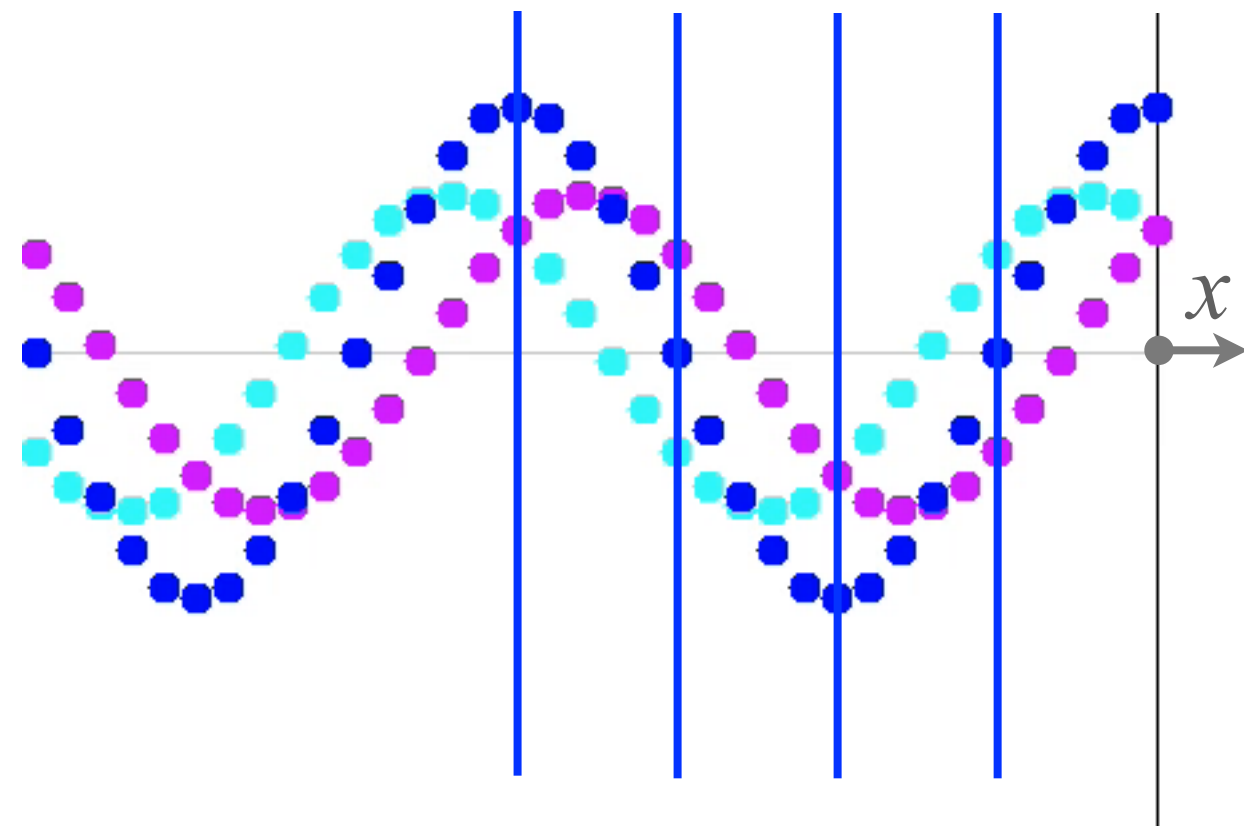
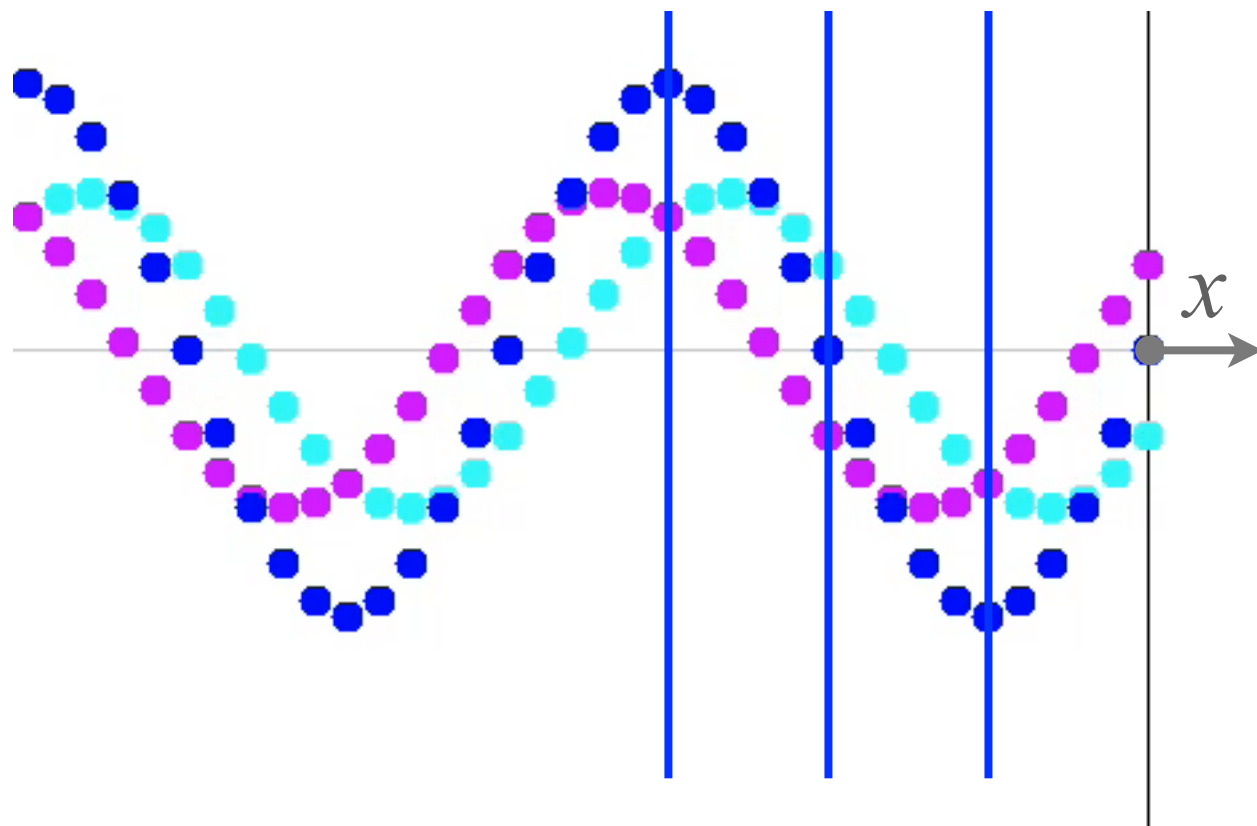
$$x = 0$$

固定端の場合

腹 節 腹 節

自由端の場合

腹 節 腹 節 腹



定在波の数学的導出

10

- 入射波と反射波を $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ で合成

固定端

入射波

反射波

場所の関数

振幅

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = -2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

“腹”

が最大,

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = (n + \frac{1}{2})\pi \longrightarrow x = \frac{2n+1}{4} \lambda$$

単振動
 $\cos \omega t$
 $\sin \omega t$

自由端

入射波

反射波

場所の関数

振幅

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = +2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

“腹”

が最大,

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi \longrightarrow x = \frac{n}{2} \lambda$$

定在波の腹と節

9

- 振幅最大の場所を腹, 全く振動しない点を節
- 固定端は節, 自由端は腹になる

$$x = \frac{2n+1}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{3}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{1}{4}\lambda$$

$$x = \frac{n}{2}\lambda$$

$$x = -\lambda$$

$$x = -\frac{1}{2}\lambda$$

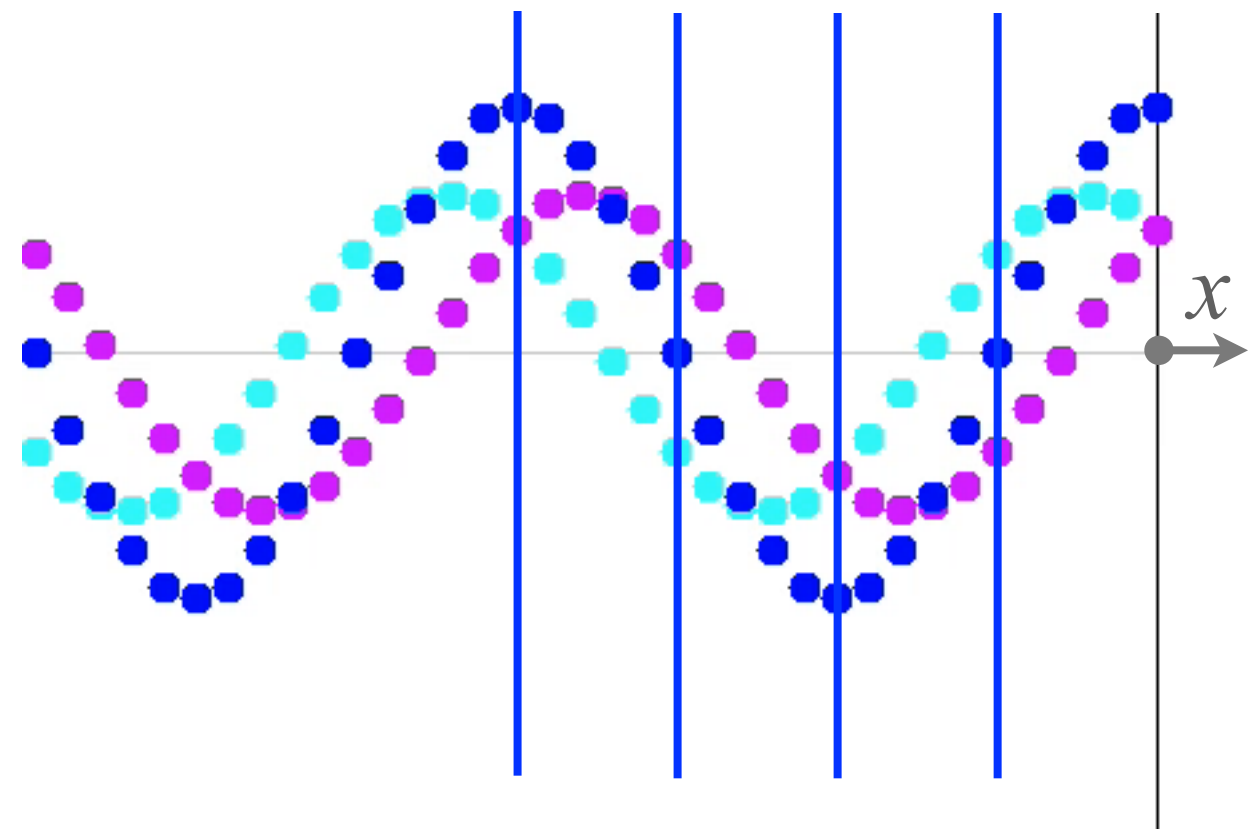
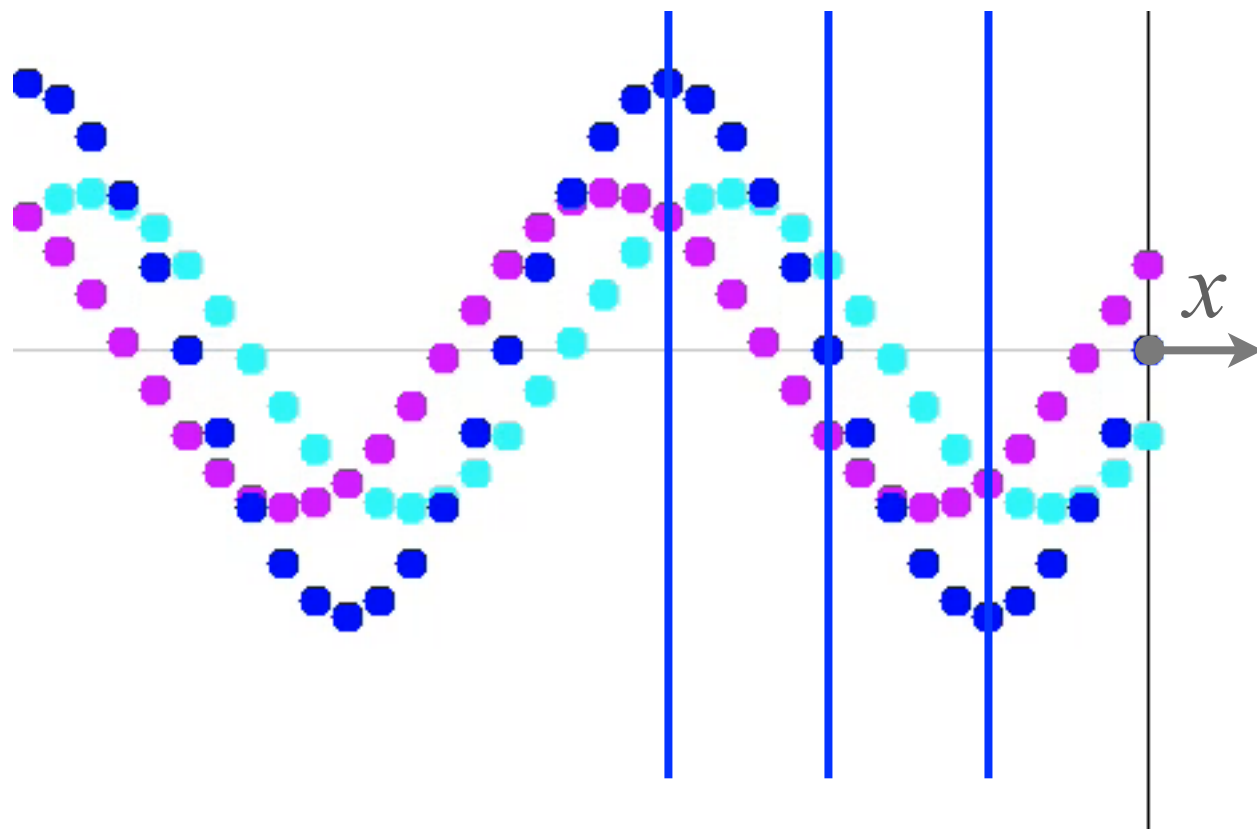
$$x = 0$$

固定端の場合

腹 節 腹 節

自由端の場合

腹 節 腹 節 腹



弦の固有振動

11

- 両端を固定した長さ L の弦をはじく
- $n\lambda = 2L$ を満たす複数の定在波: **固有振動**
- 定在波の振動数を **固有振動数**

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \frac{n}{2L}$$

波が左右に行き交って反射を繰り返して定在波が形成される

基本振動

$n = 1$



2 倍振動

$n = 2$

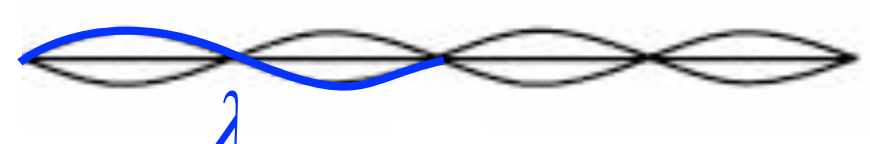


3 倍振動

$n = 3$



$n = 4$



弦の固有振動

11

- 両端を固定した長さ L の弦をはじく
- $n\lambda = 2L$ を満たす複数の定在波: **固有振動**
- 定在波の振動数を **固有振動数**

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$v = f_n \lambda_n$

波動方程式の v

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \frac{n}{2L}$$

波が左右に行き交って反射を繰り返して定在波が形成される

基本振動

$n = 1$



2 倍振動

$n = 2$



3 倍振動

$n = 3$



$n = 4$

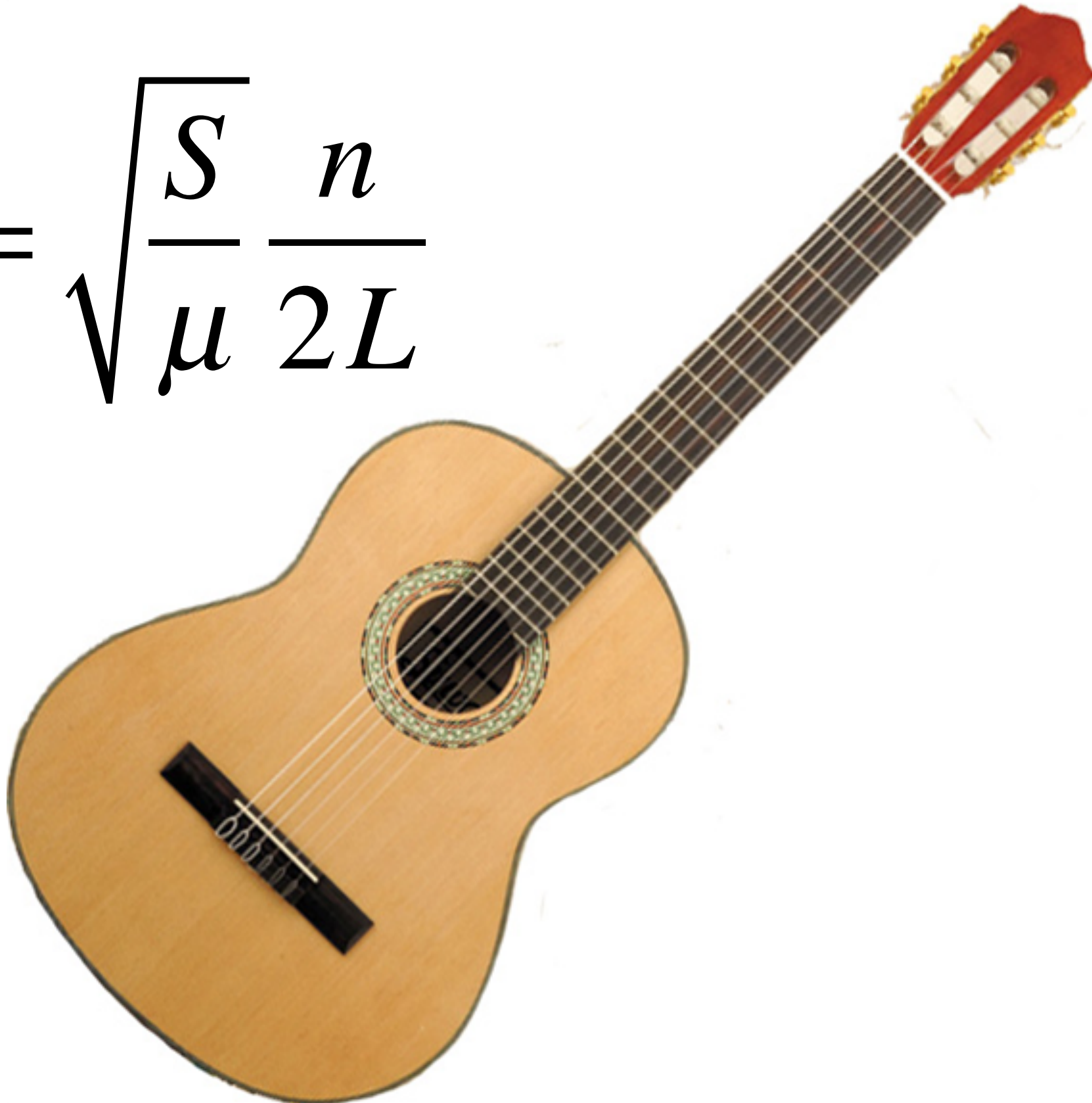


ギター弾くひと居ますか？

余談

音の高さ

$$f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \frac{n}{2L}$$

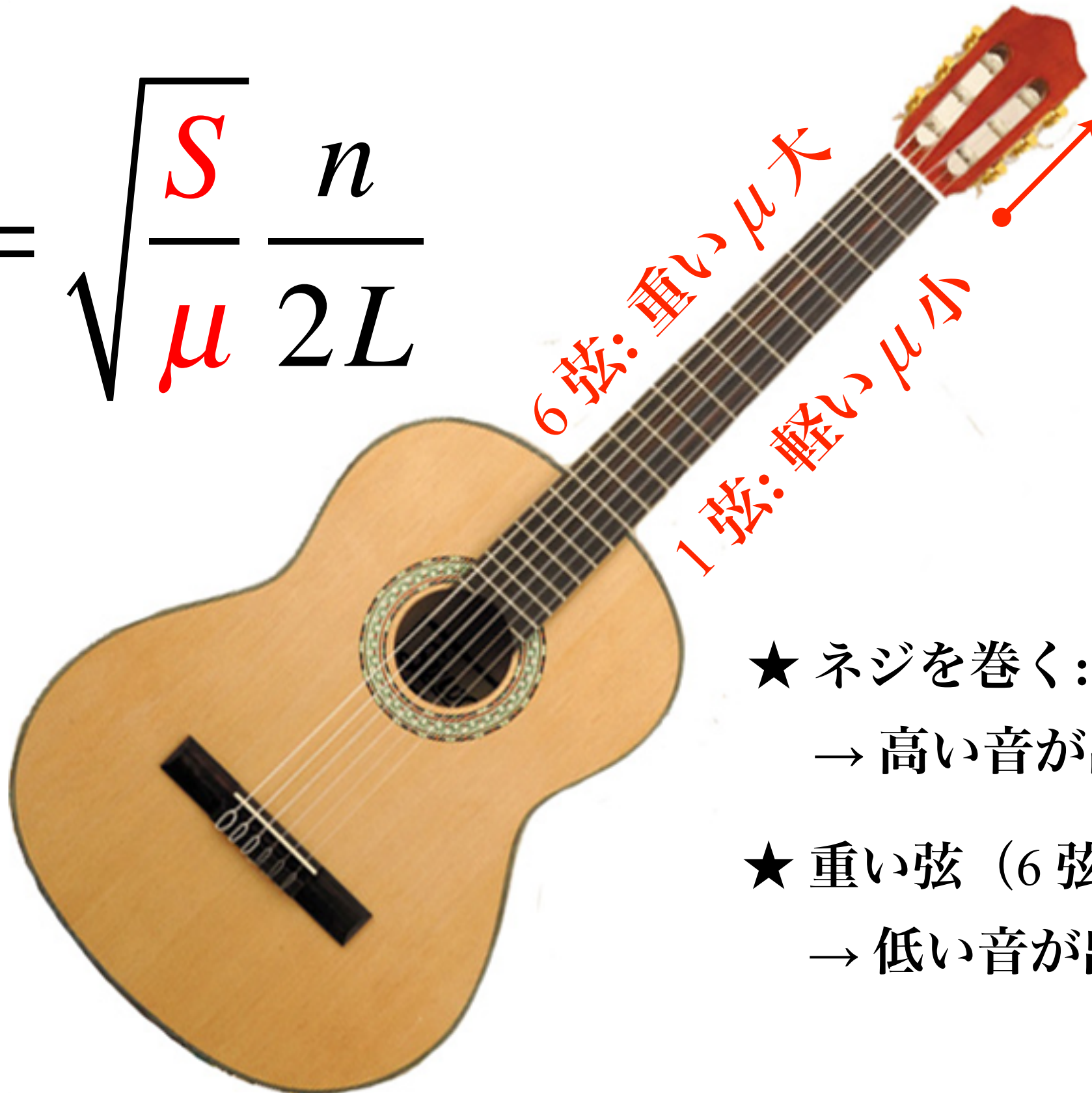


S と μ について考える

余談

音の高さ

$$f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \frac{n}{2L}$$



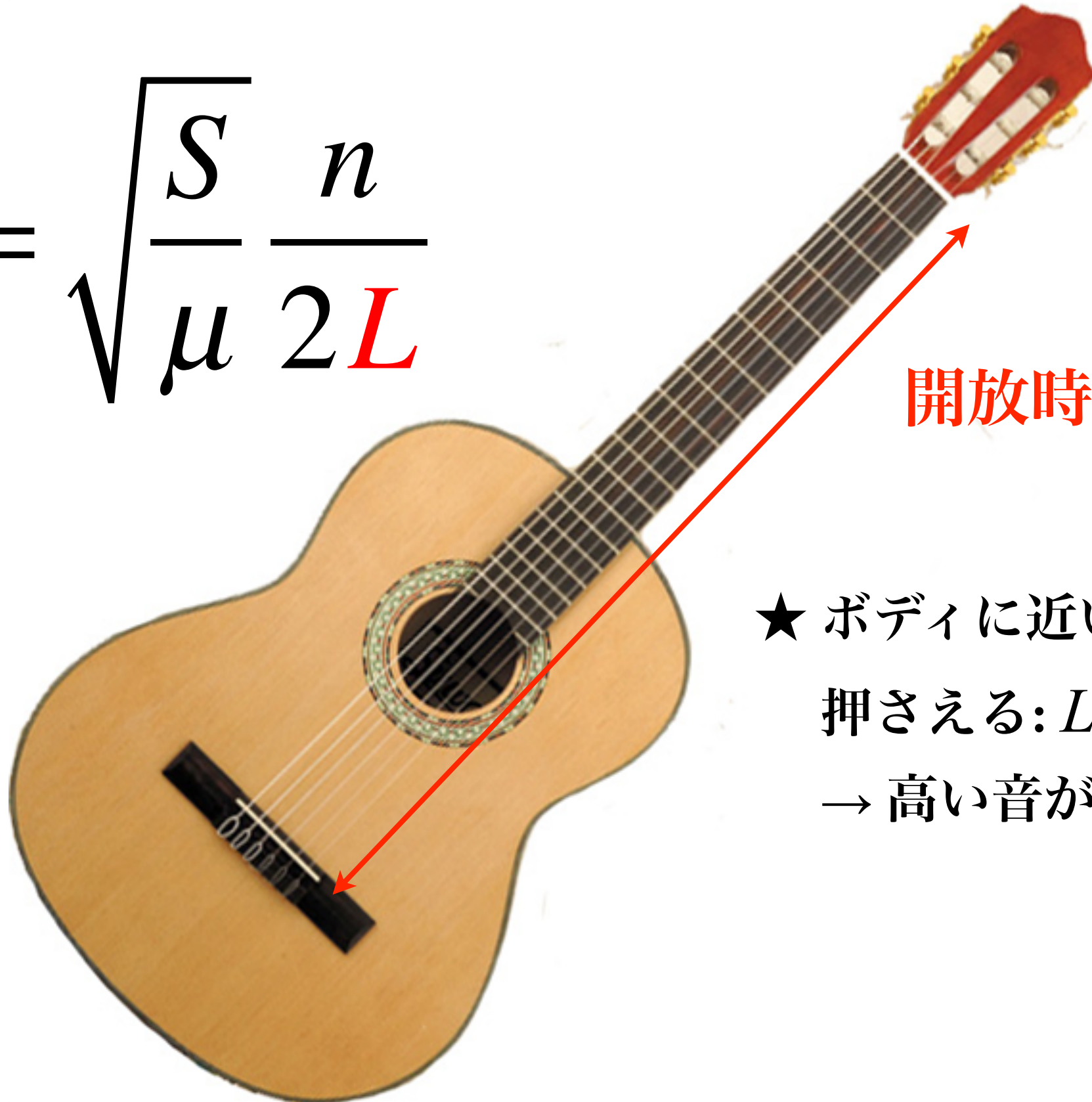
- ★ ネジを巻く: S を大きく
→ 高い音が出る
- ★ 重い弦 (6 弦): μ を大きく
→ 低い音が出る

L について考える

余談

音の高さ

$$f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \frac{n}{2L}$$



開放時の L

★ ボディに近いフレットを
押さえる: L を小さくする
→ 高い音が出る

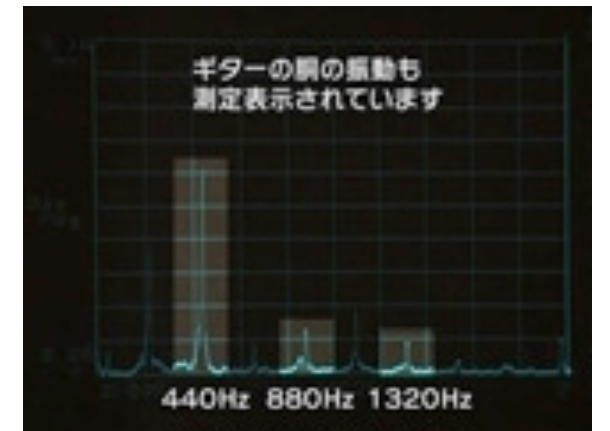
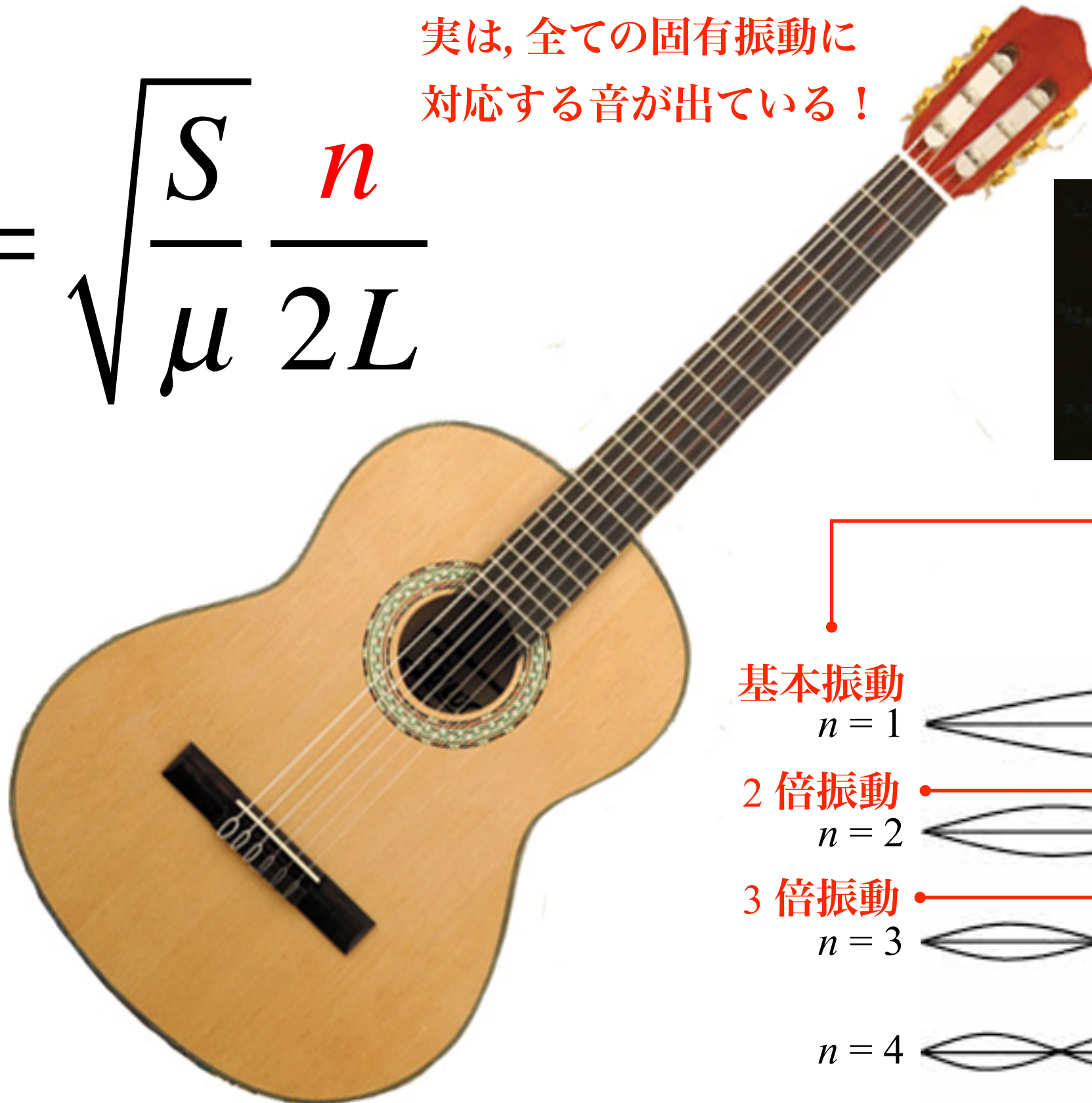
n について考える

余談

実は、全ての固有振動に
対応する音が出ている！

音の高さ

$$f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \frac{n}{2L}$$



基本振動

$n = 1$

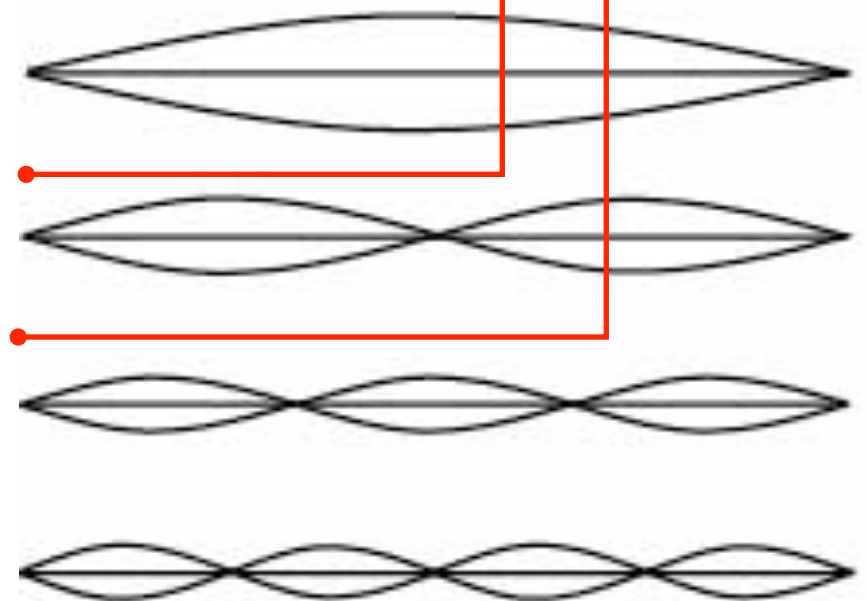
2 倍振動

$n = 2$

3 倍振動

$n = 3$

$n = 4$



角周波数 ω と角波数 k

12

- 波を数式で表現する際に, 角周波数 ω と (角)波数 k を用いることが多い

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin(\omega t - kx)$$

単位時間あたりに

位相がどれだけ進むか?

角周波数: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

単位長さあたりに

位相がどれだけ変わるか?

(角)波数: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$