第 4 回 ①

物理学概論第一

古典力学の王道 ②

- 我々の目標: 物体の位置ベクトルを追跡

$$\mathbf{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$$

- そのための武器:

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t) \qquad m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

$$\mathbf{F} = -\lambda\mathbf{v} - \beta|\mathbf{v}|\mathbf{v}$$

$$F = -kx$$

- 運動方程式を積分し, 位置ベクトルを求める
- 今日は, 弾性力 $F = -kx$ による運動を考える

弾性力 - フックの法則　③

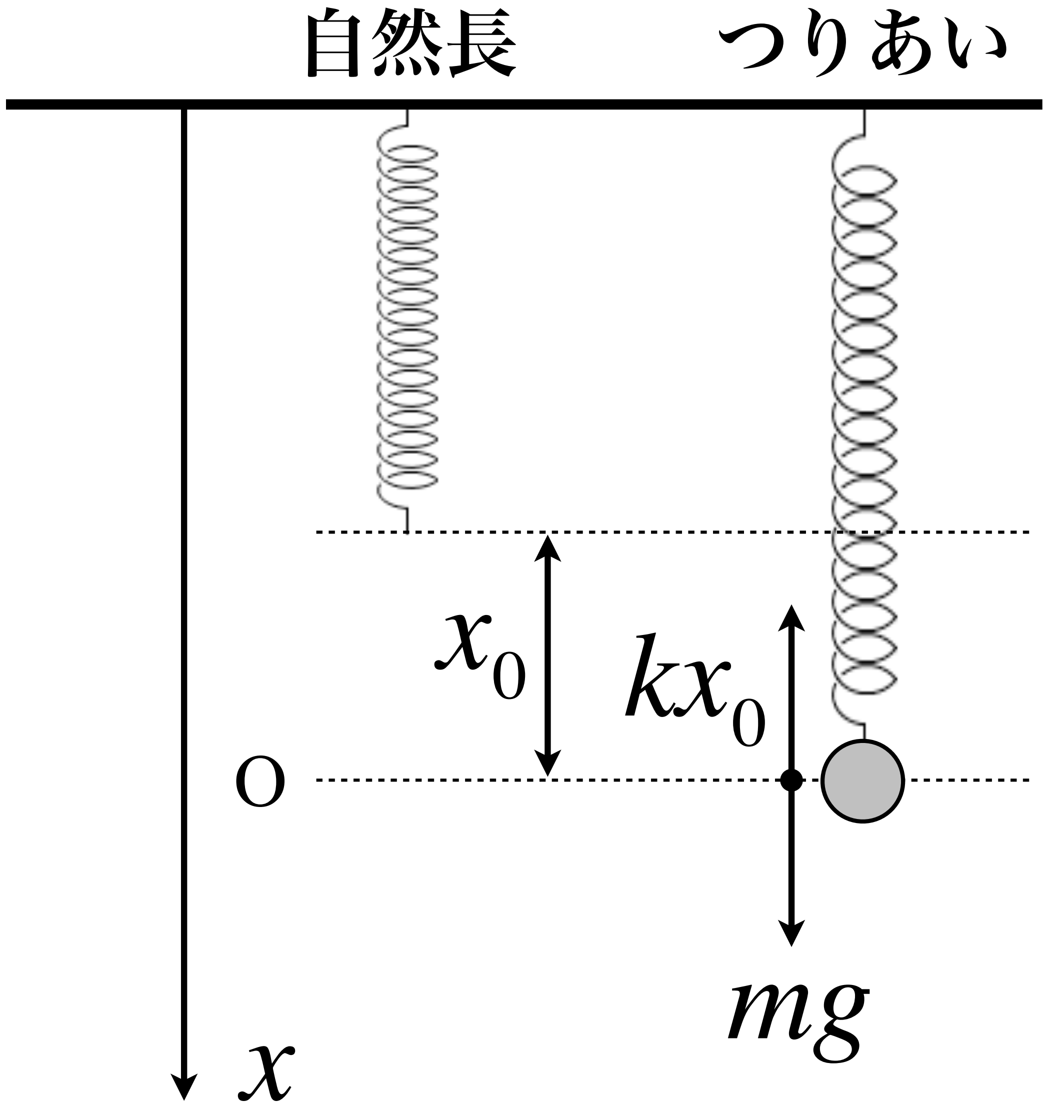
- 弾性力: 固体を変形させるとき, 変形を元に戻そうとして働く復元力

弾性定数（正の値）

$$F = -kx$$

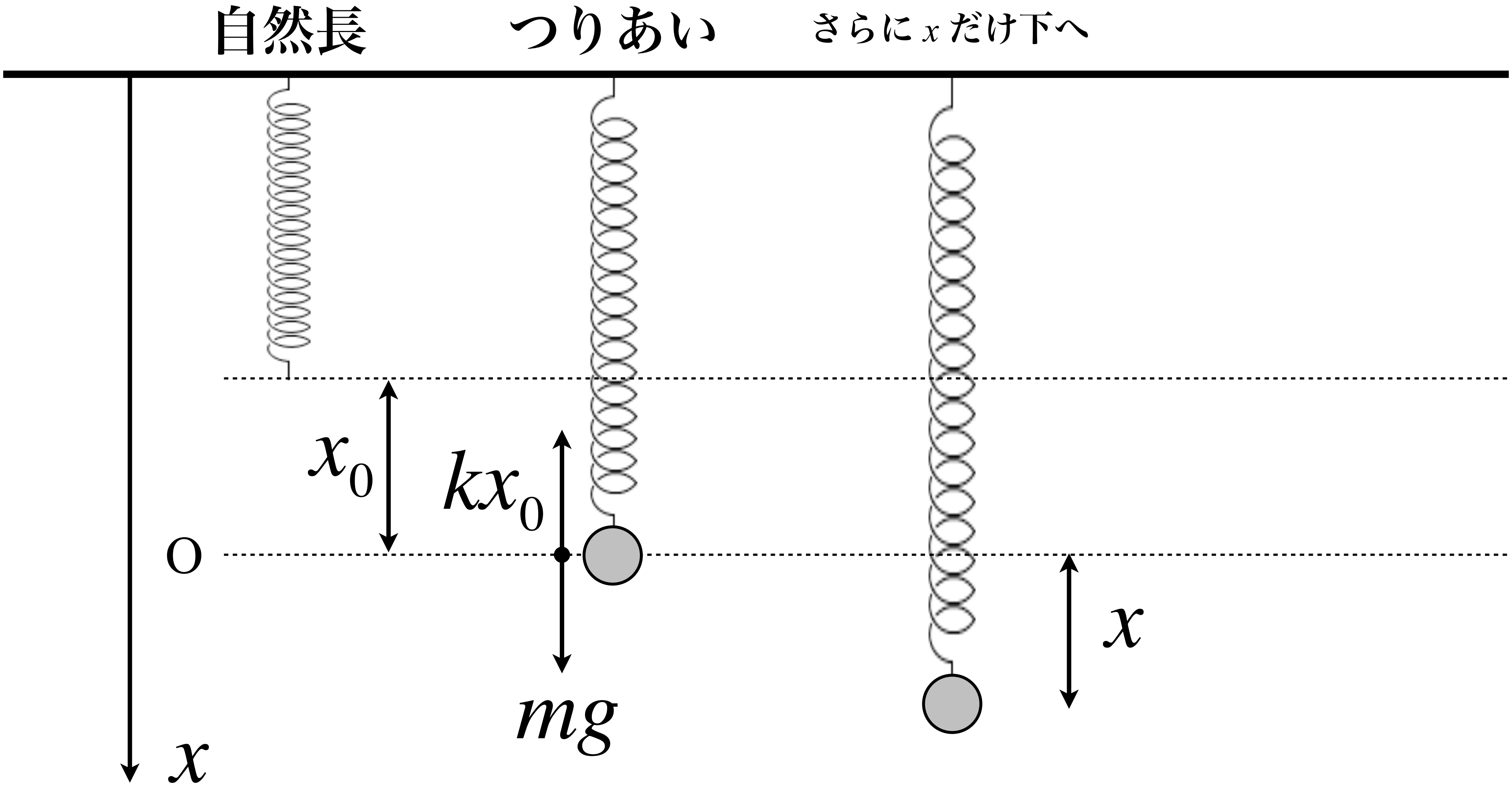
自然な状態からの変形の大きさ

ばねにおもりを吊す ④

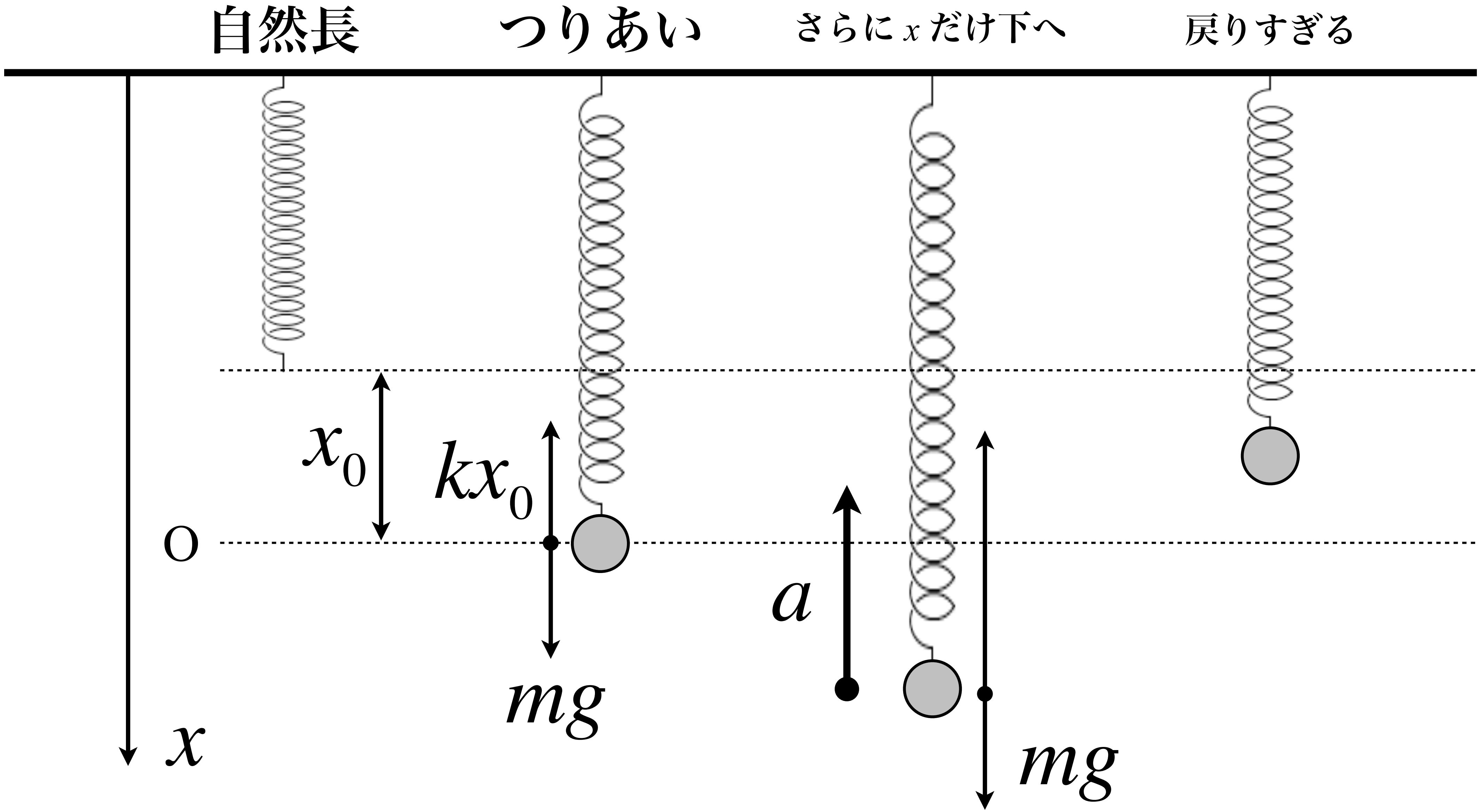


重力 mg と弾性力 kx_0 がつり合っている状態

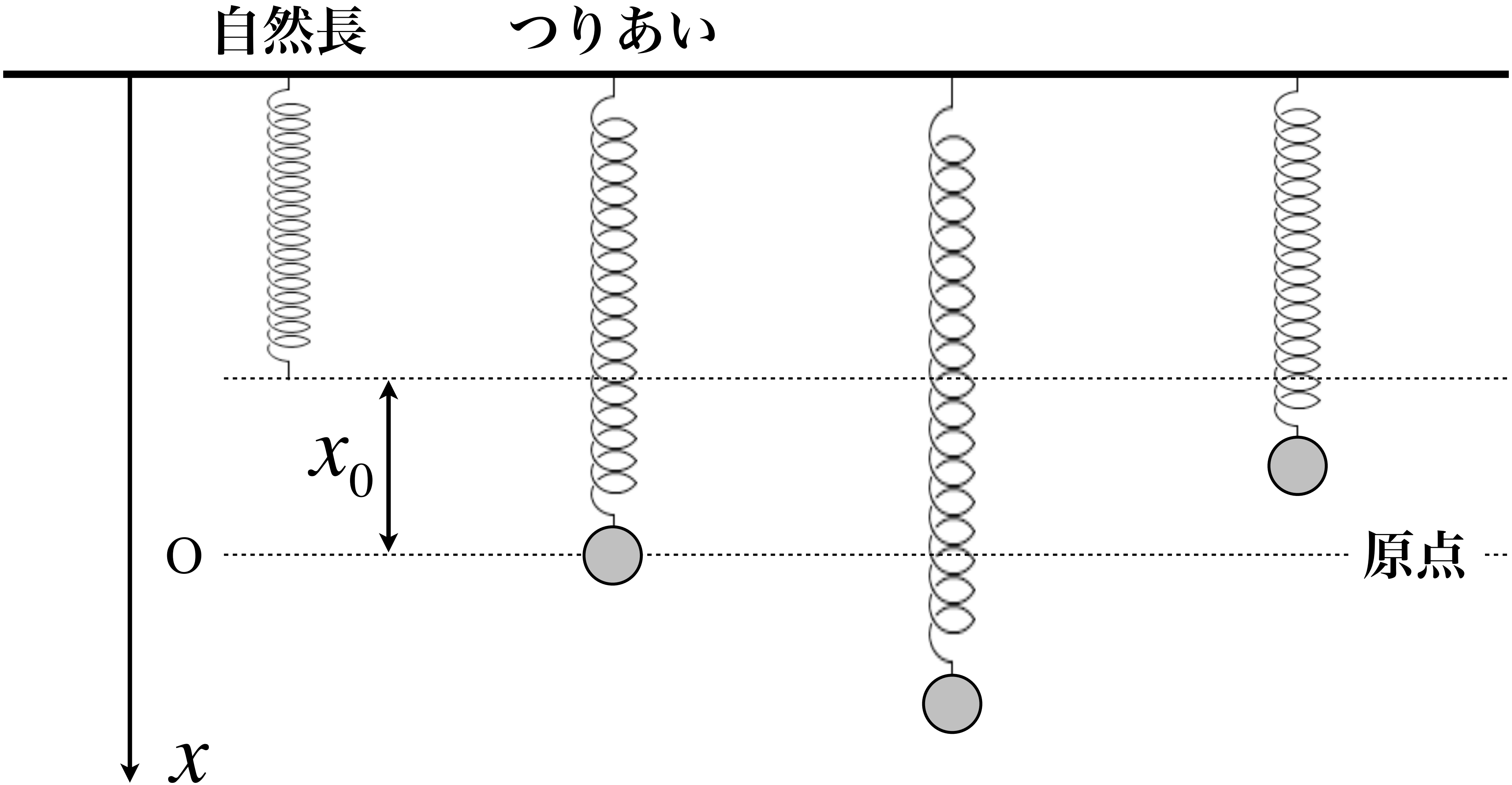
さらに引っ張って離す ⑤



つりあいの位置を通り過ぎる ⑥

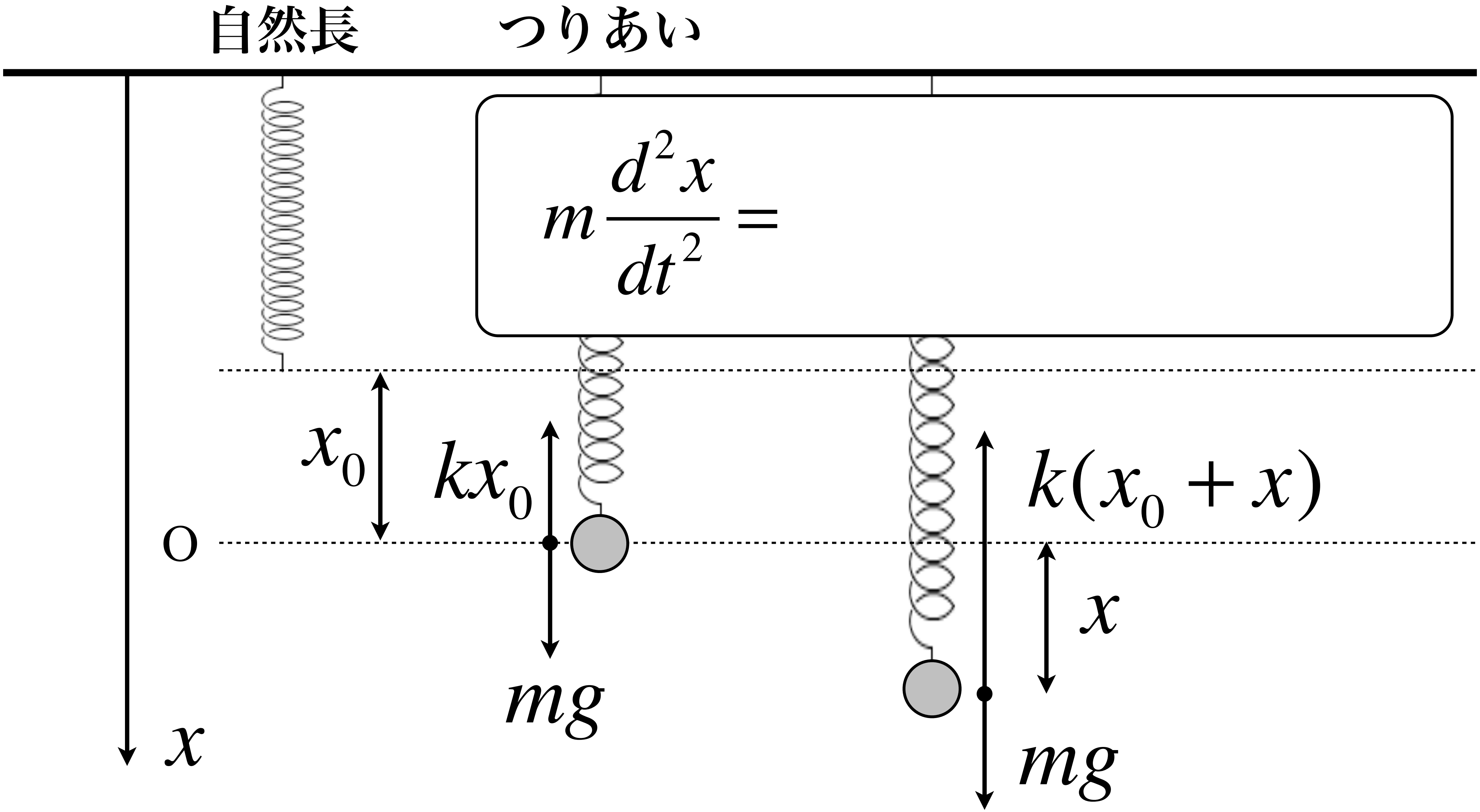


これがいわゆる単振動 ⑦



おもりの運動方程式 ⑧

$$m\frac{d^2x}{dt^2} =$$



単振動の従う微分方程式 ⑨

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \iff \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

単振動の微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

微分方程式の一般解を探す ⑩

- 時間で 2 回微分すれば, 元の関数の $-\omega^2$ 倍になるような関数を探す. ひとつの候補は,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

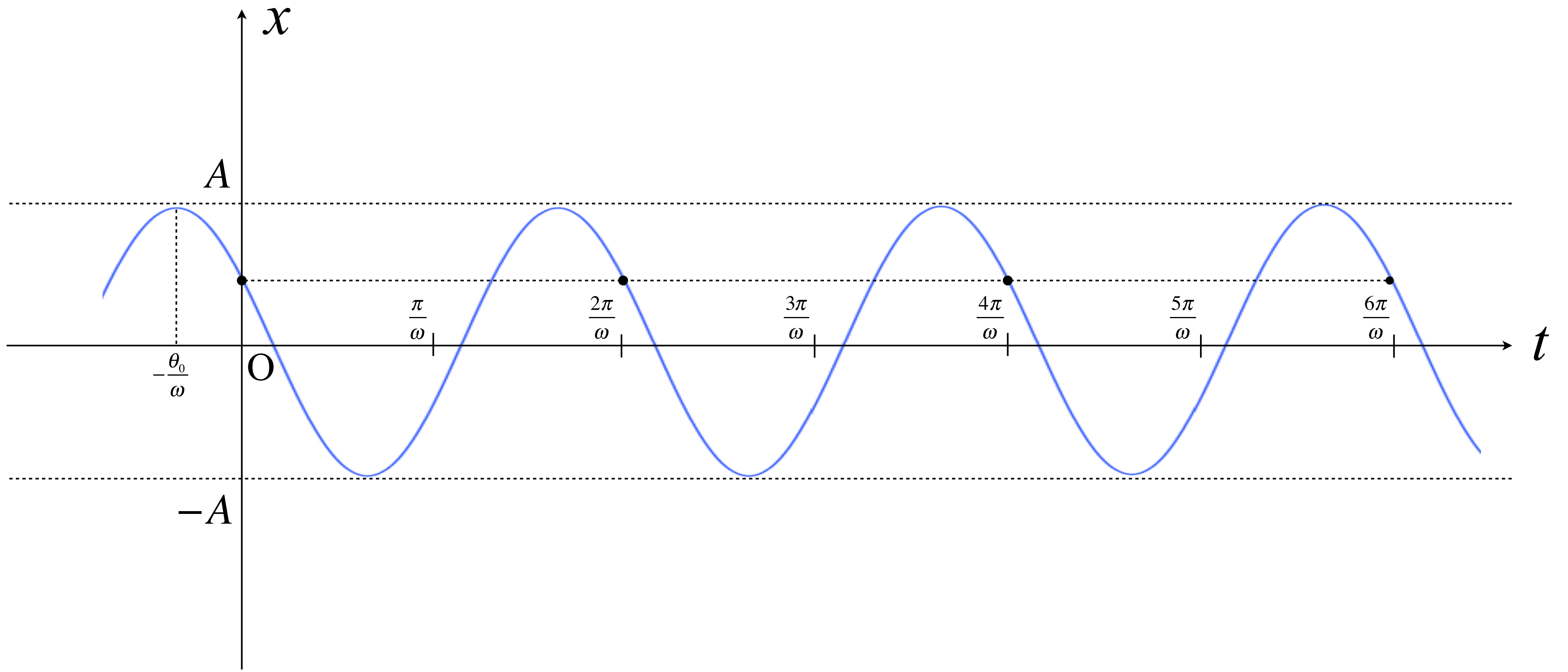
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} =$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} =$$

一般解の形

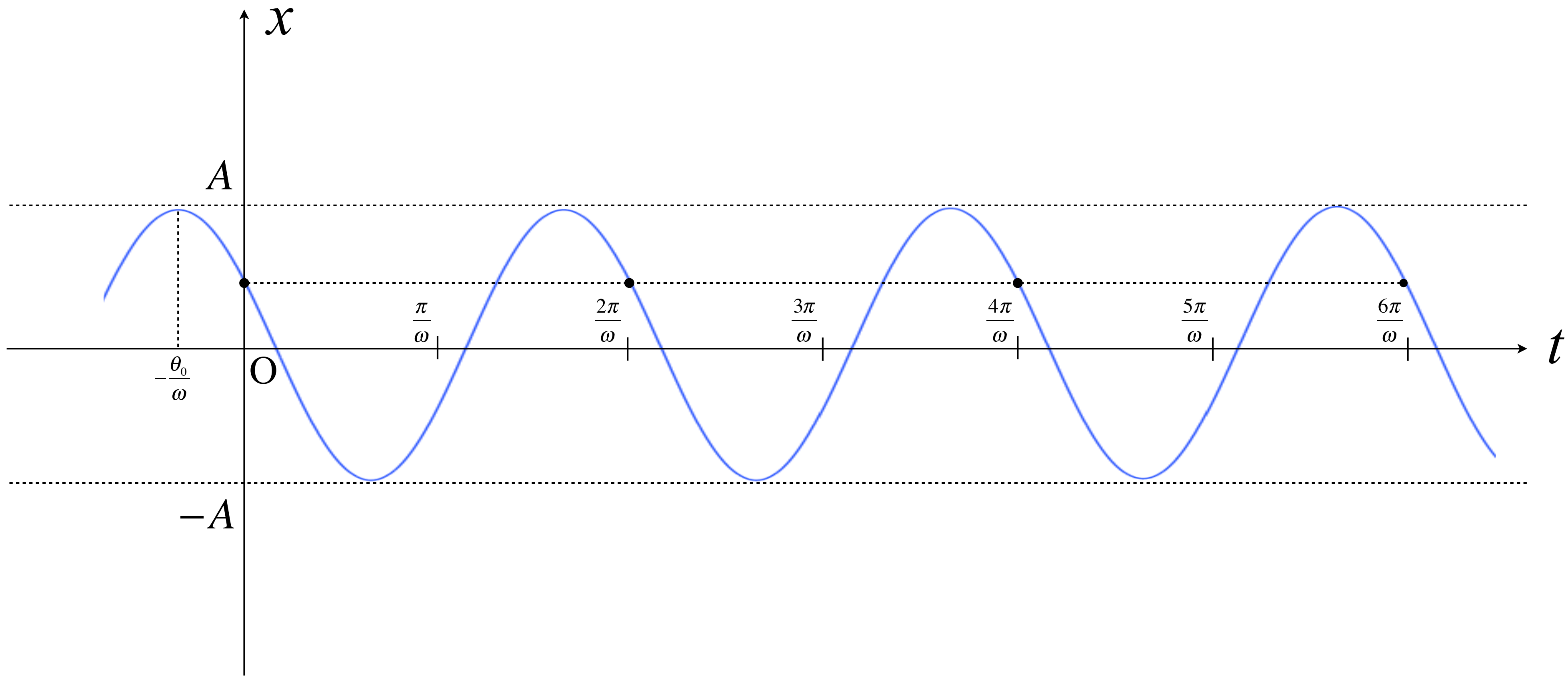
- 一般解　$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$ を描いてみる

$x = A, -A$ の間を往復する周期運動



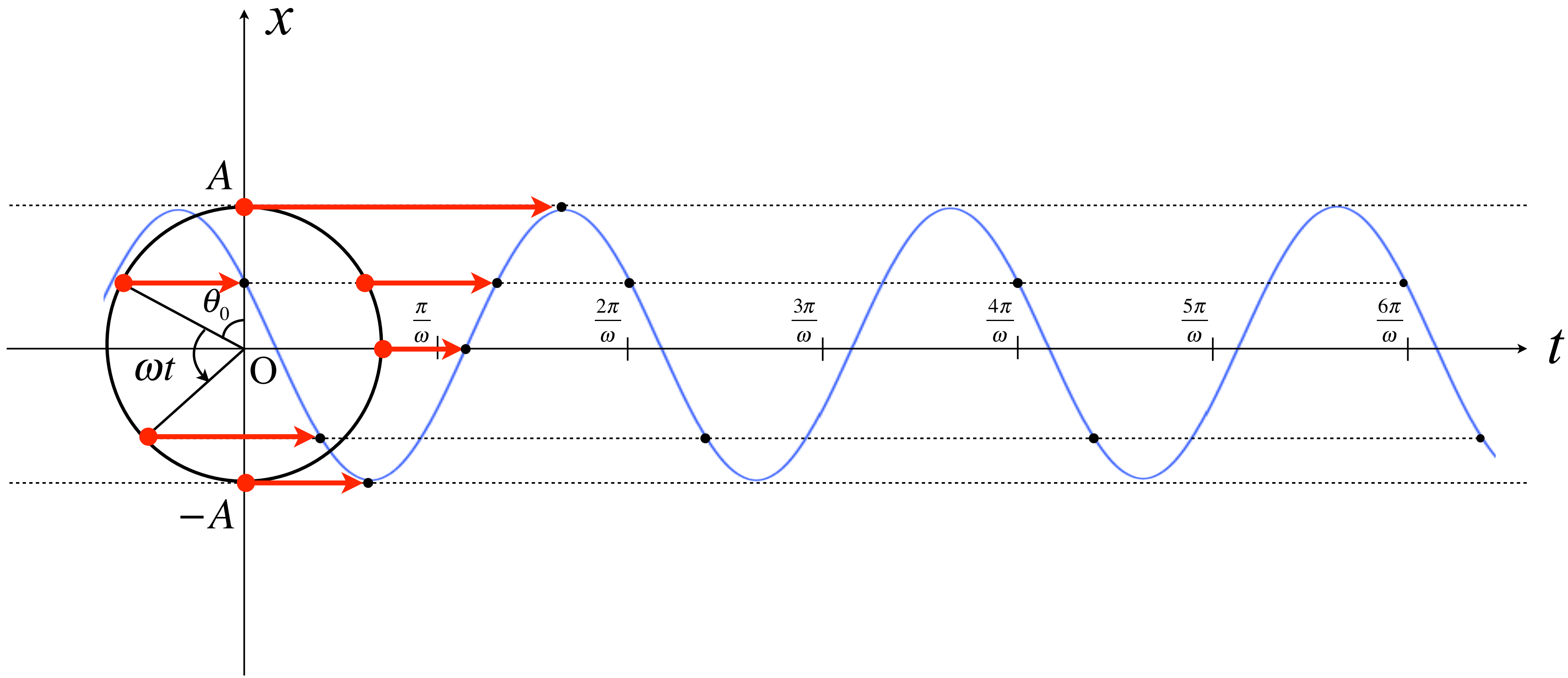
位相という概念 ⑫

- 一般解 $x(t) = A\cos(\underbrace{\omega t + \theta_0}_{\text{位相 - Phase}})$ を描いてみる



単振動と等速円運動 ⑬

- 単振動の変位 = 等速円運動の x 座標

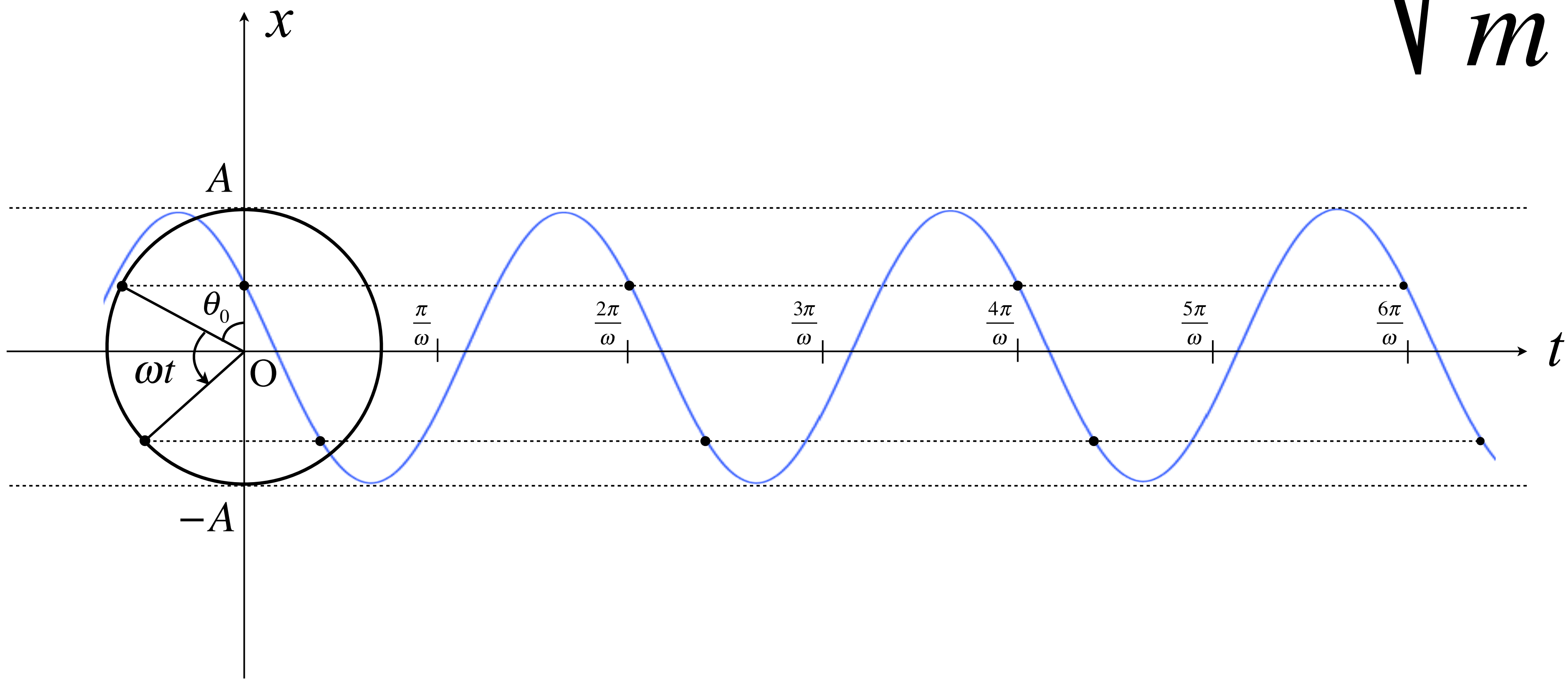


角振動数: ω

⑭

- 等速円運動の角速度に相当する

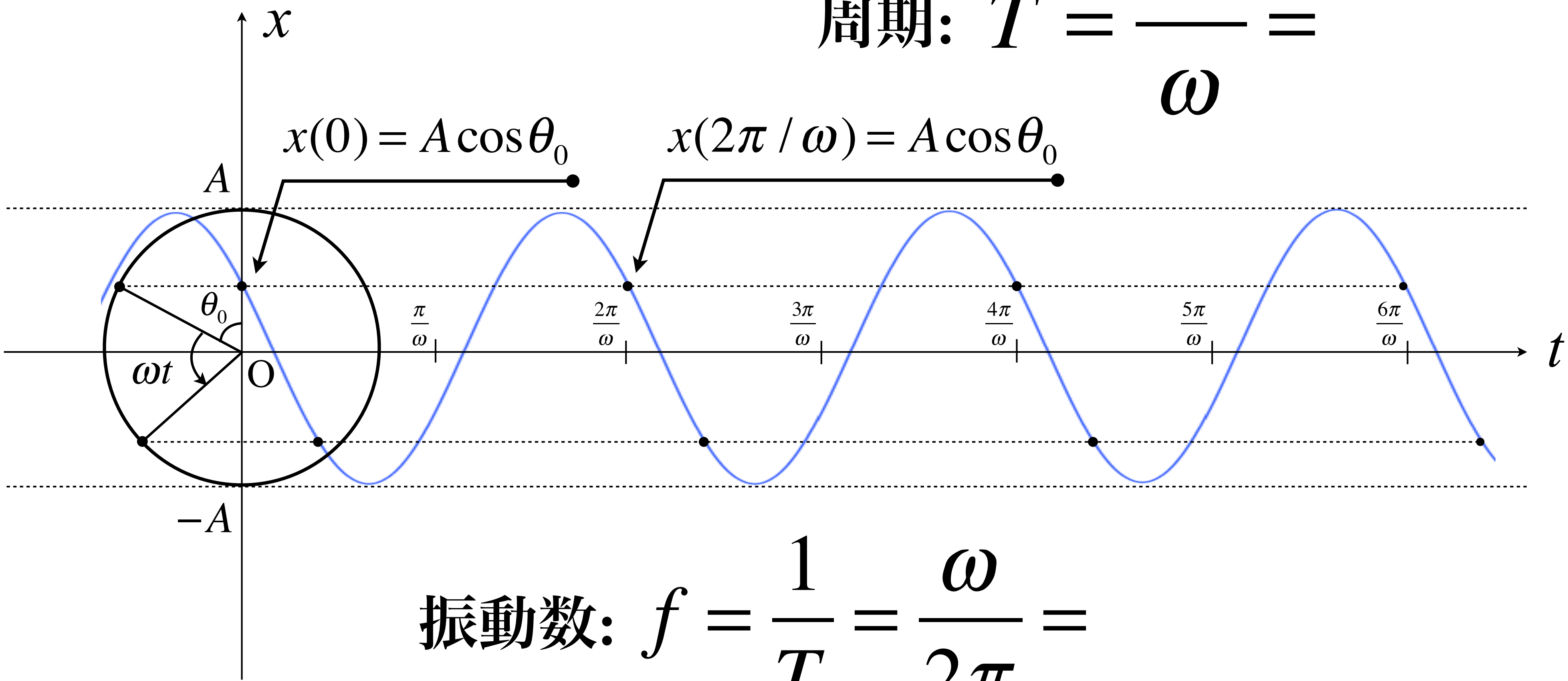
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



周期性を表現する物理量: T, f ⑮

- $2\pi/\omega$ ごとに同じ運動状態になる

周期: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} =$



振動数: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi} =$

周期性を決める要素

- 振動数の式を良く見てみる...

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

k が大きい

$\rightarrow f$ が大きい

m が大きい

$\rightarrow f$ が小さい

- しかし, f は振幅 A には依存しない: 等時性

特殊解を求めるには...

- $x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$ はあくまで一般解
- A とか θ_0 を決めて, 特殊解を求めたい
- 特殊解を求めるには, 初期条件が必要

初期条件:

$t = 0$ で, おもりの位置 x_0, 速度 v_0 とする

任意定数は初期条件に対応 ⑱

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \longrightarrow x(0) =$$

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0) \longrightarrow v(0) =$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$=$$

弾性力による位置エネルギー ⑲

- ばねの弾性力による単振動の位置と速度は,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0), \quad v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0)$$

- これを用いて以下の量を計算してみる

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

弾性力による位置エネルギー　⑳

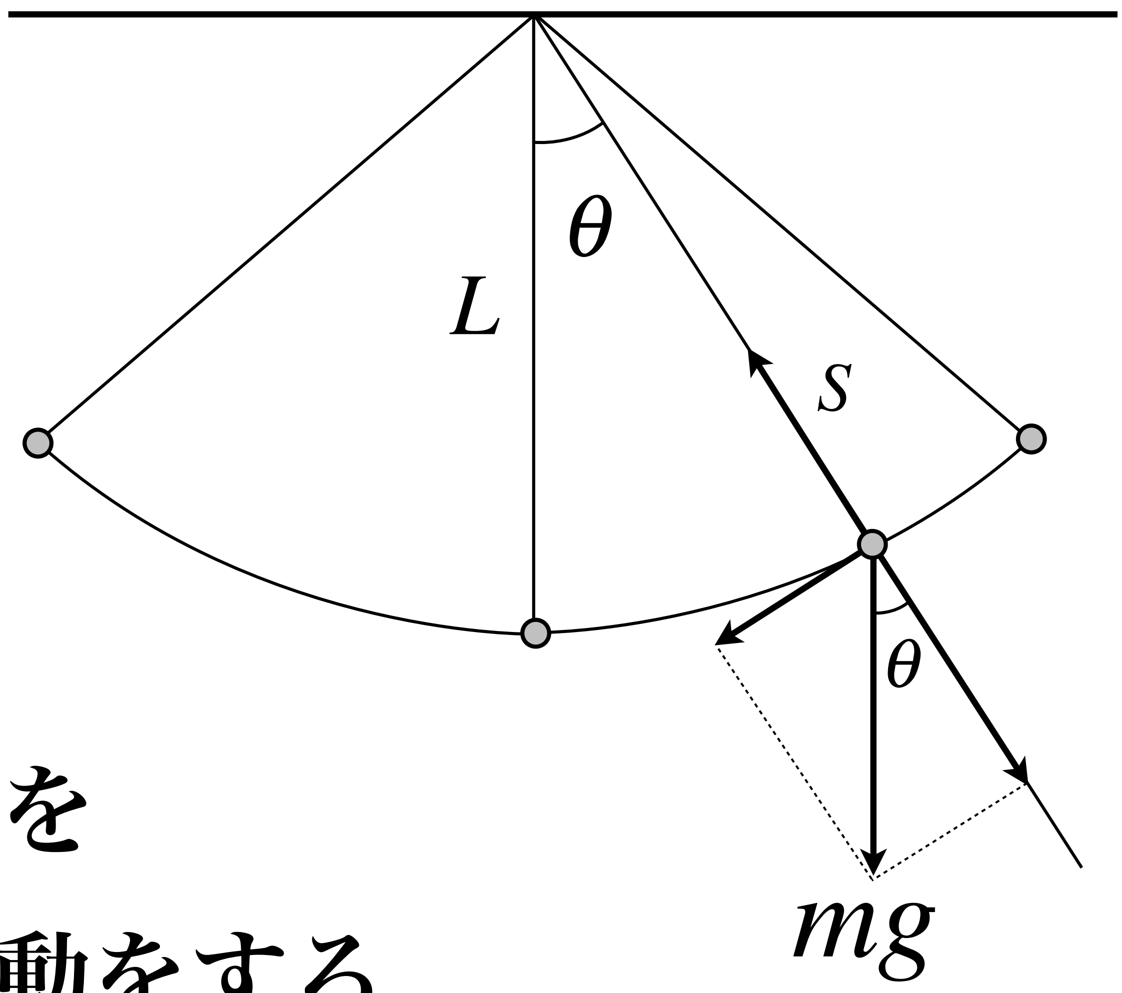
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 =$$

力学的エネルギー保存則 ㉑

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathrm{Const.}$$

単振り子というのもある

- 振り子に働く力
  - 糸の張力 S
  - 重力 mg



- mg の接線方向成分を復元力とする往復運動をする

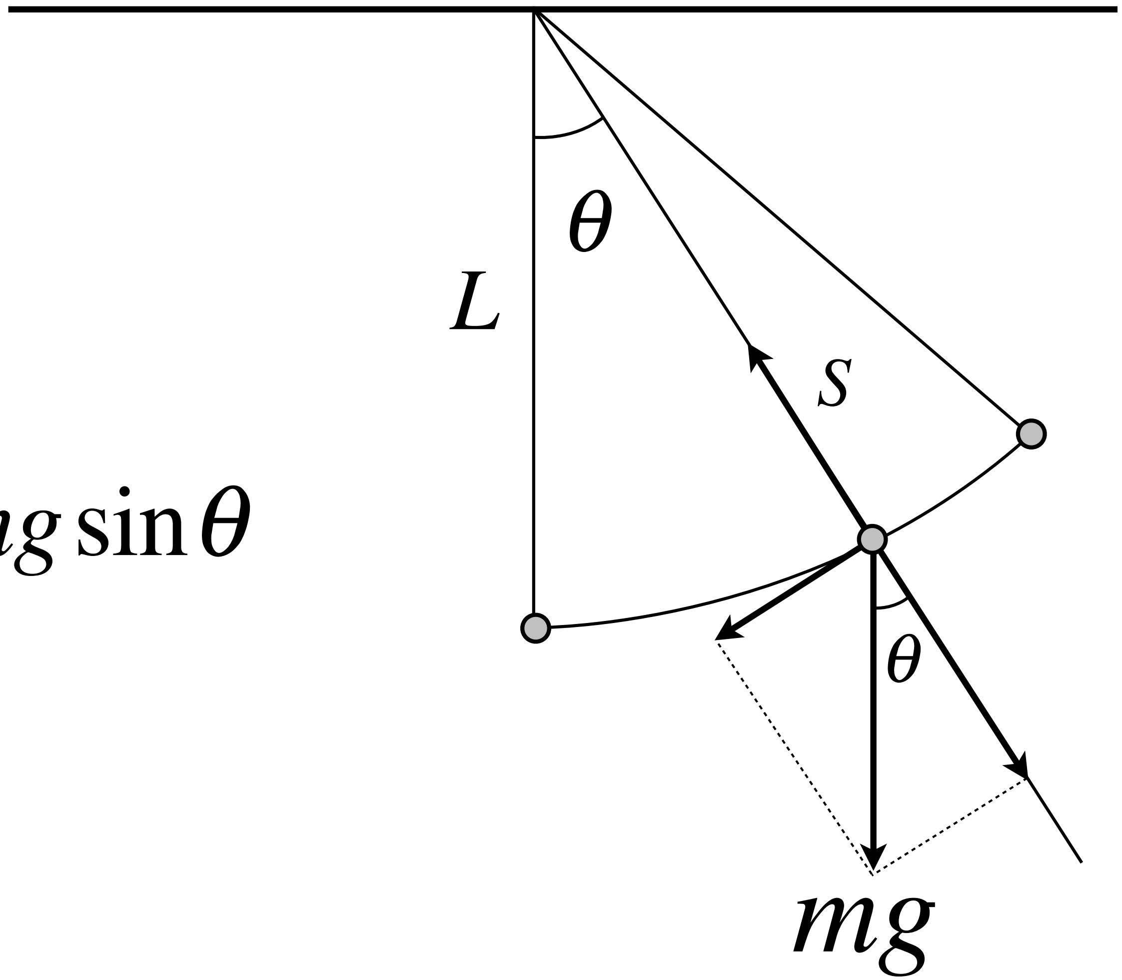
単振り子の運動方程式

- 運動方程式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2(L\theta)}{dt^2}$$

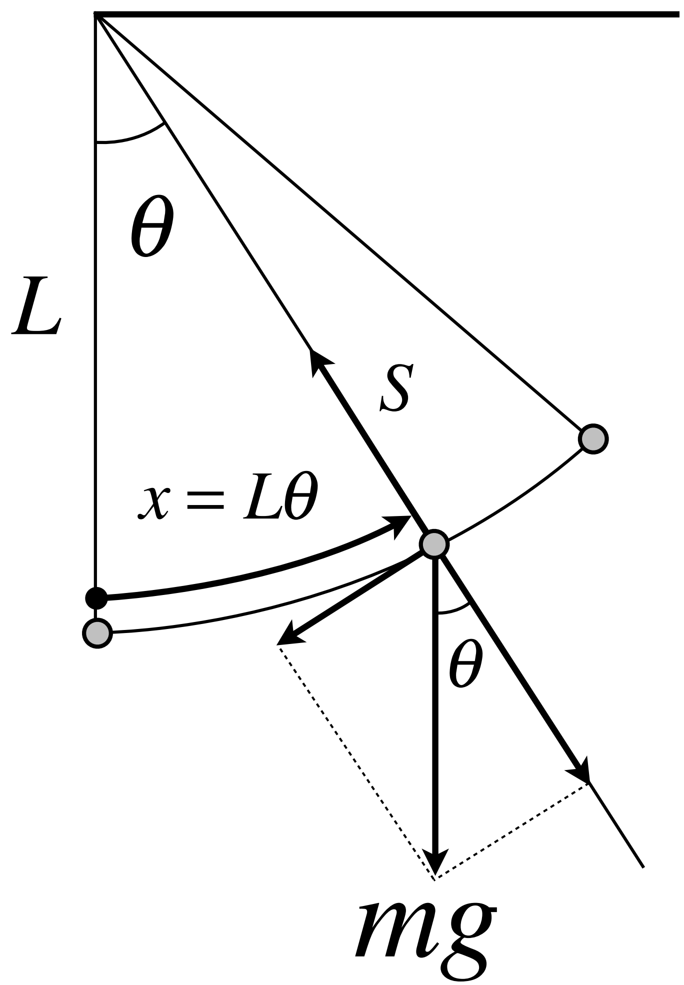
$$= mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$\Leftrightarrow$



微分方程式の一般解は？

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta = -\omega^2\theta, \quad \omega =$$



一般解

$$\theta =$$

周期:

$T =$

振動数:

$f =$