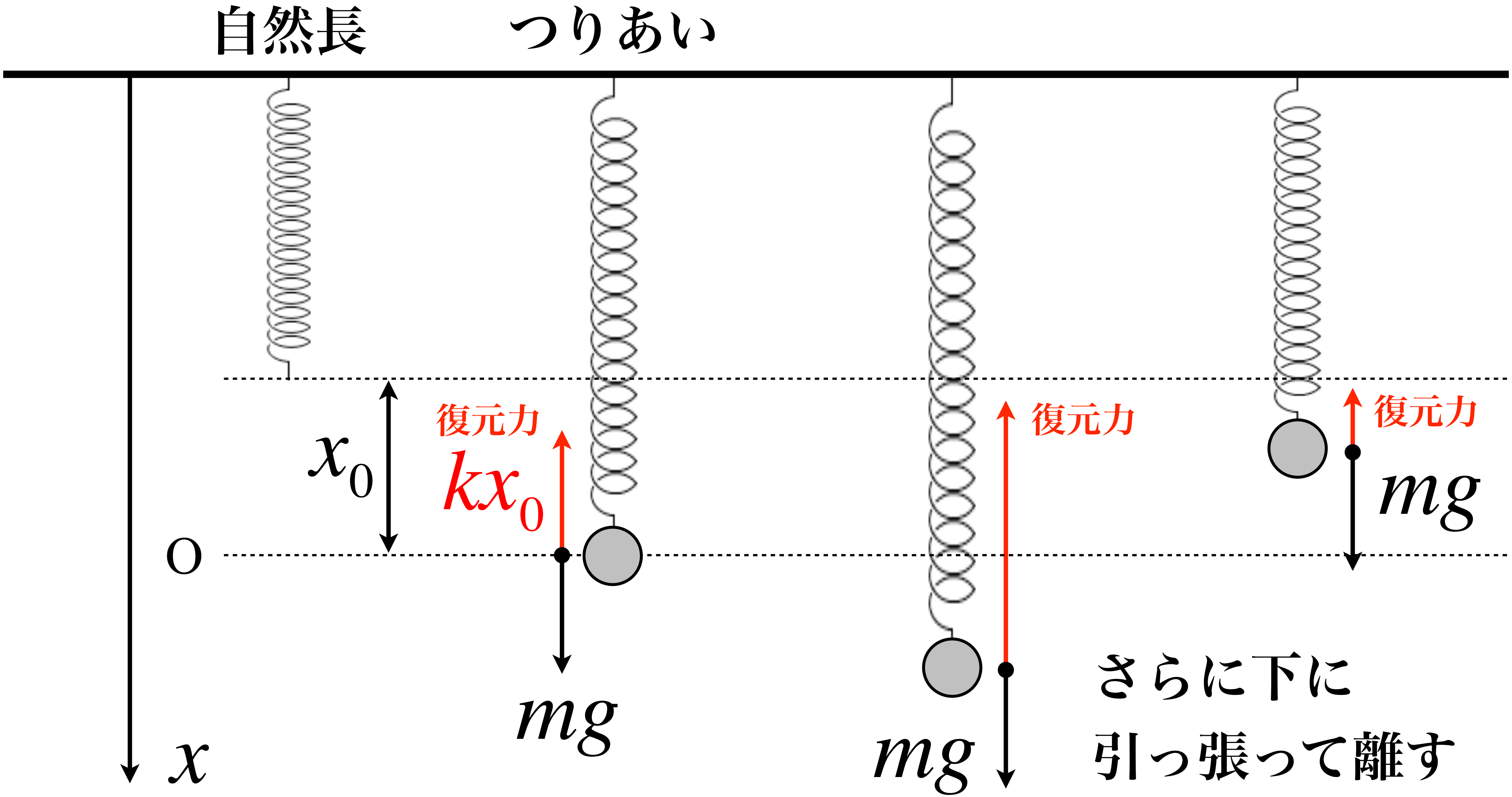
第 5 回 ①

物理学概論第一

単振動 - 復習 ②



単振動の従う微分方程式　③

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \iff \frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}x$$

$$\omega^2$$

単振動の微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

微分方程式の一般解を探す ④

- 時間で 2 回微分すれば, 元の関数の $-\omega^2$ 倍になるような関数を探す. ひとつの候補は,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x(t)$$

特殊解を考える ⑤

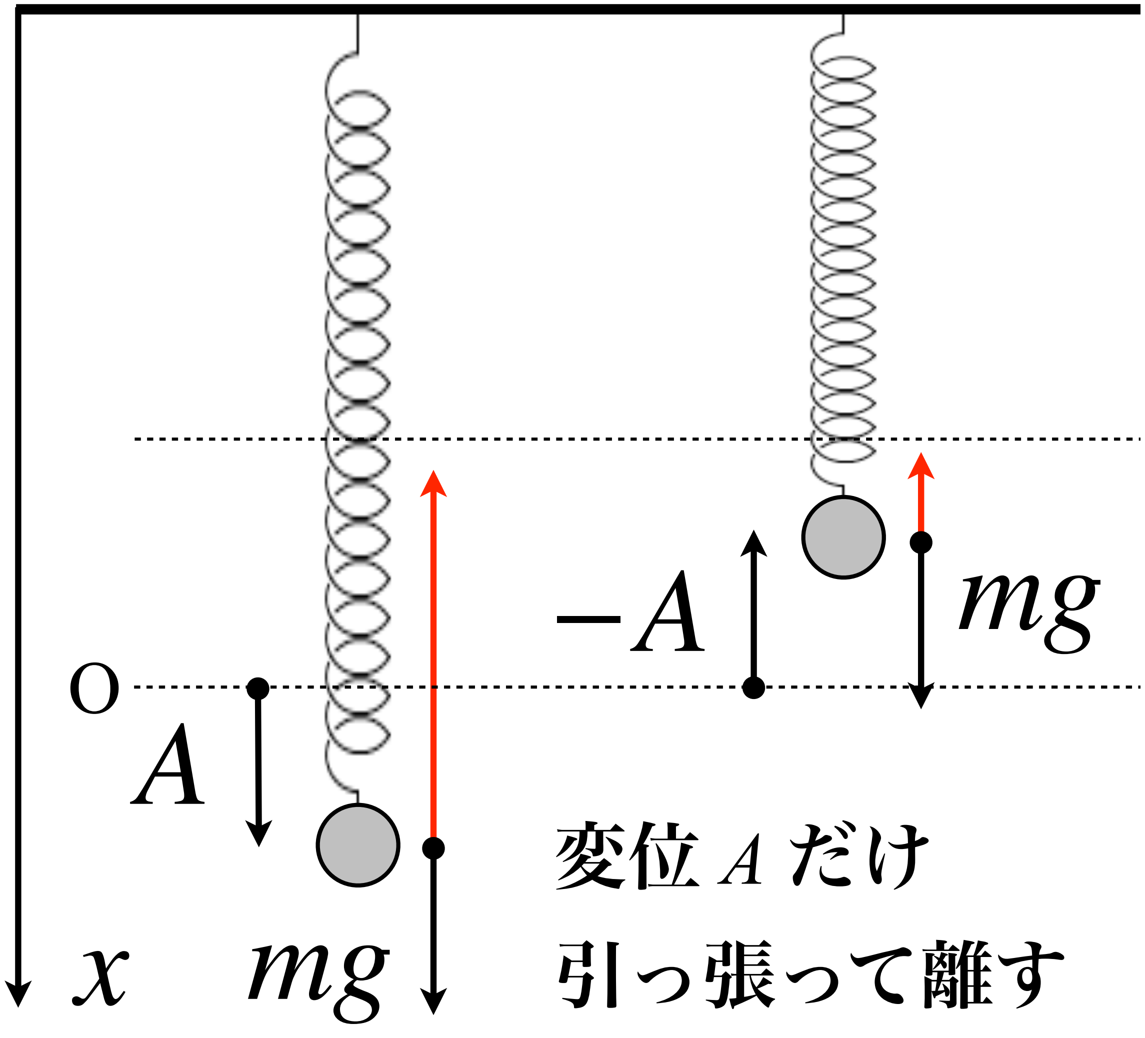
- A だけ下に引っ張って離す場合の特殊解は？

初期条件

$$x(0)=A,\ v(0)=0$$

特殊解

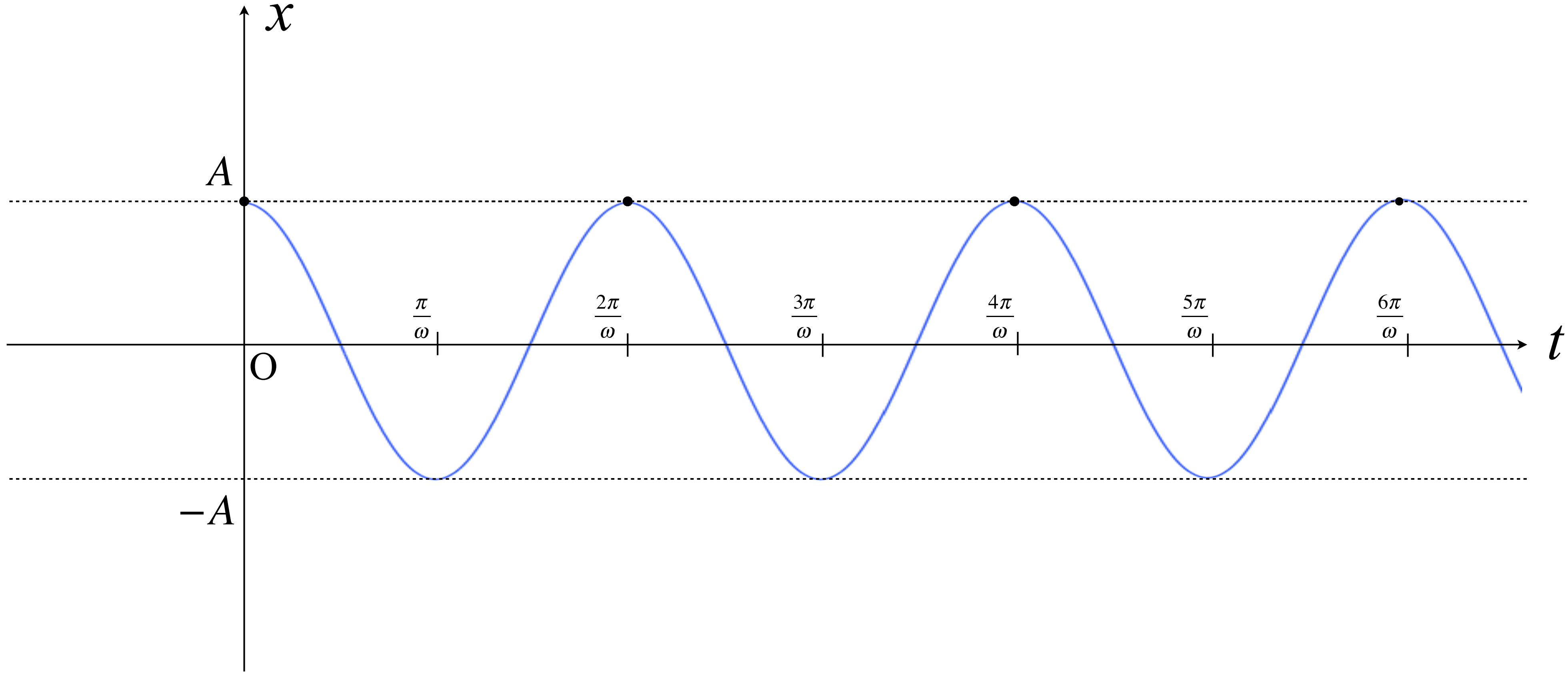
$$x(t)=$$



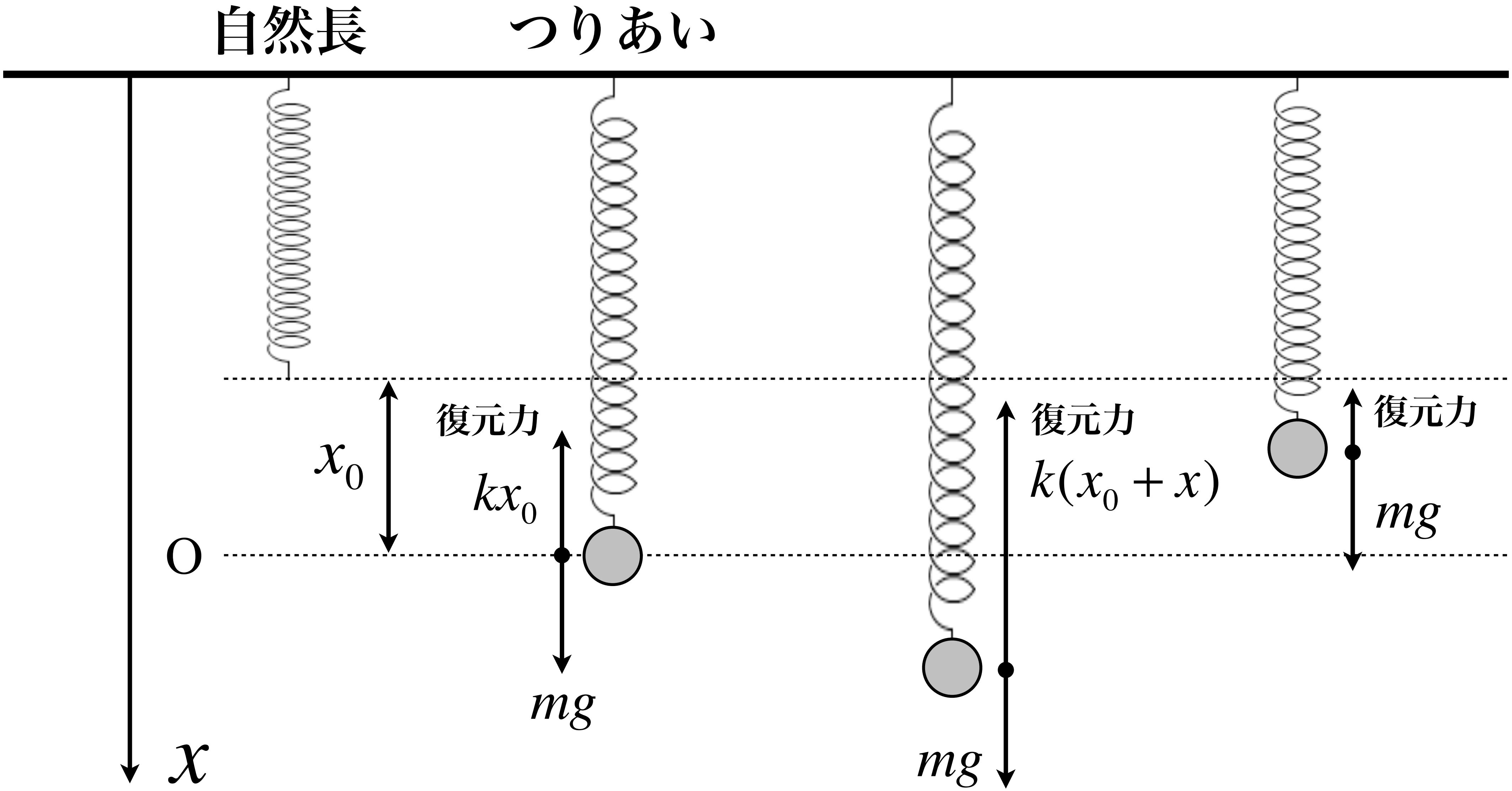
特殊解のすがた ⑥

- 特殊解　$x(t) = A\cos\omega t$ を描いてみる

$x = A, -A$ の間を往復する**周期運動**

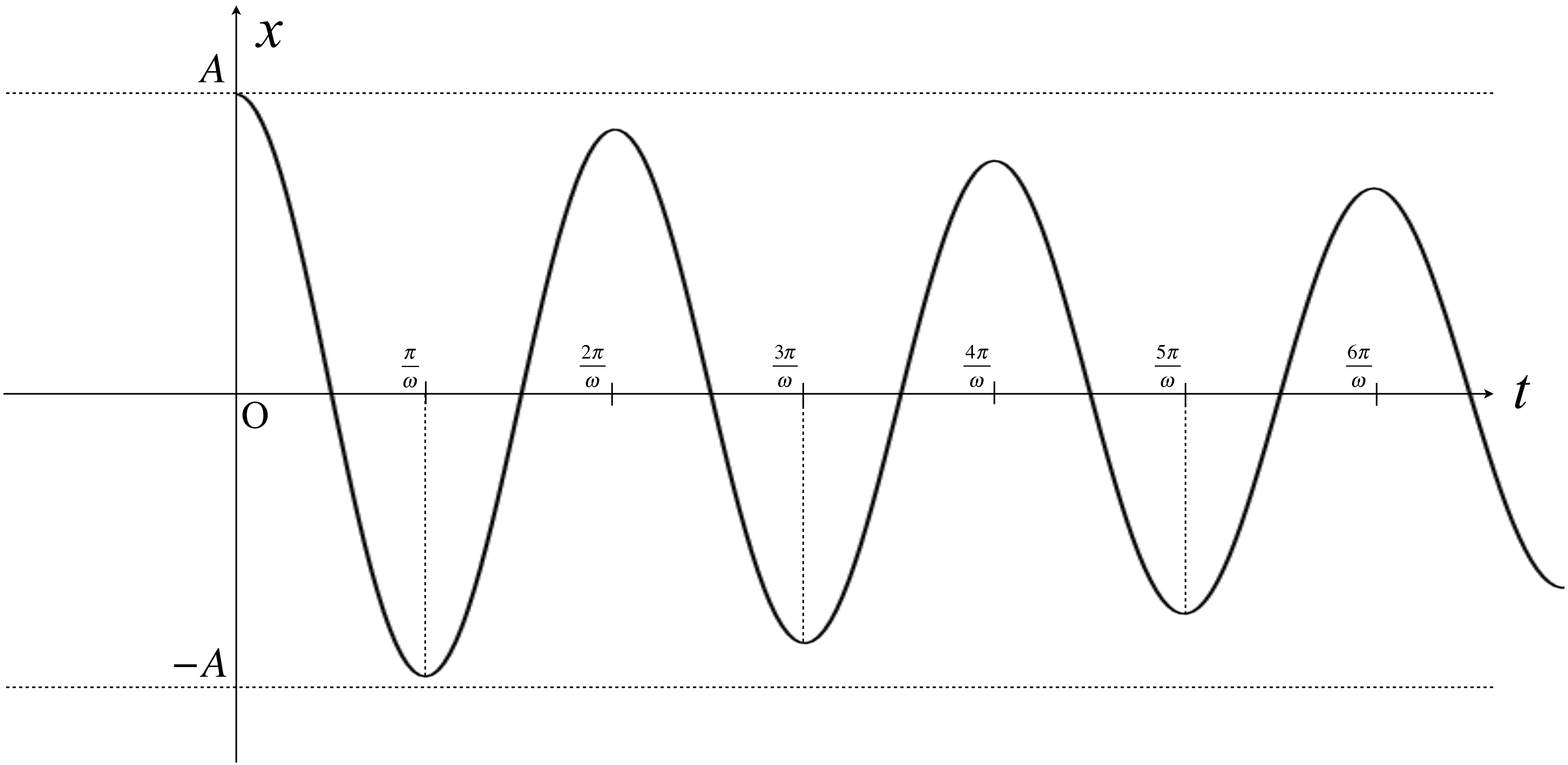


ばね振り子を水に入れる ⑦



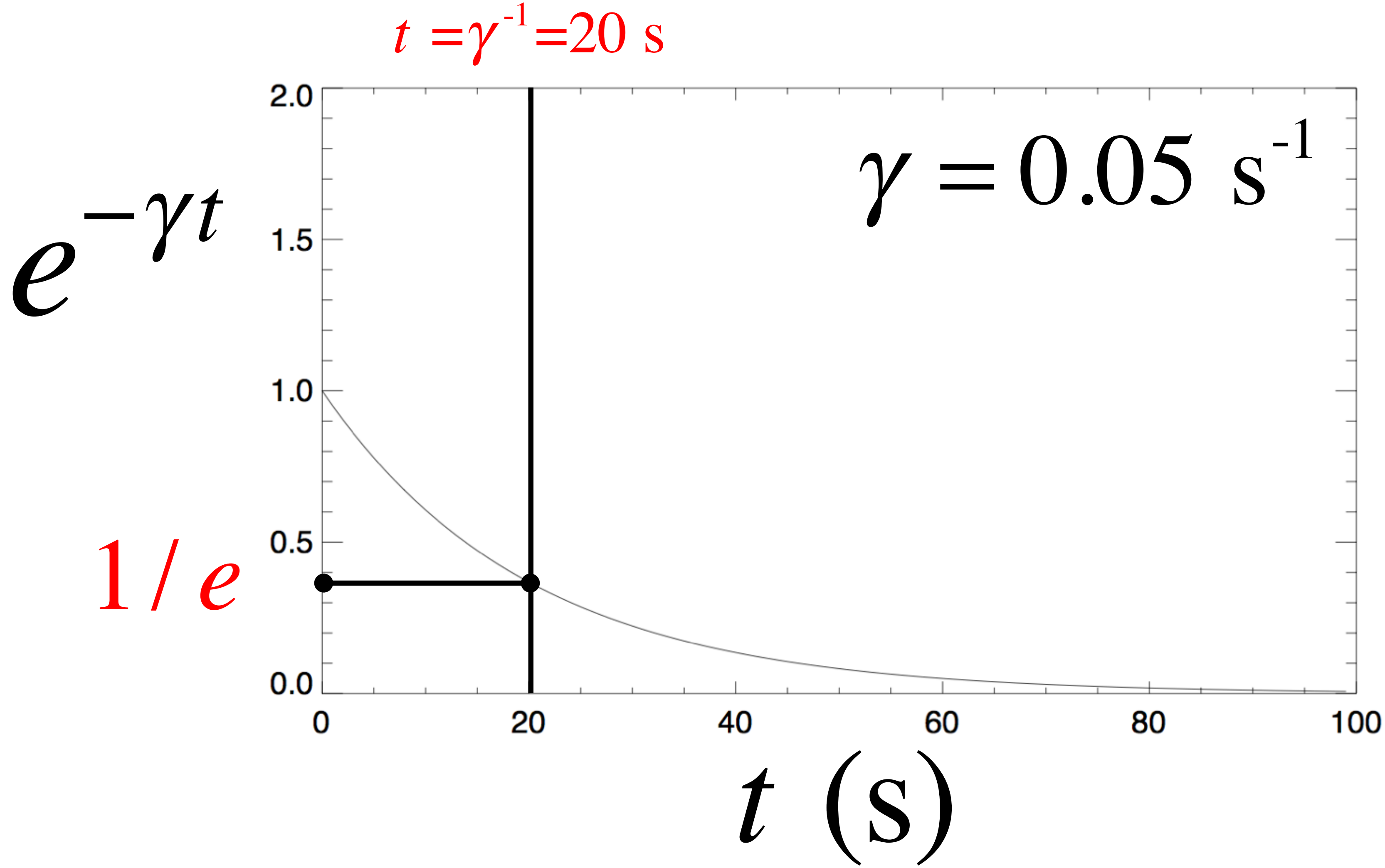
どうなるか... ⑧

- 直感的に以下のようになりそう...



減衰を表す関数 ⑨

- $e^{-\gamma t}$ ってどんな形をしている？



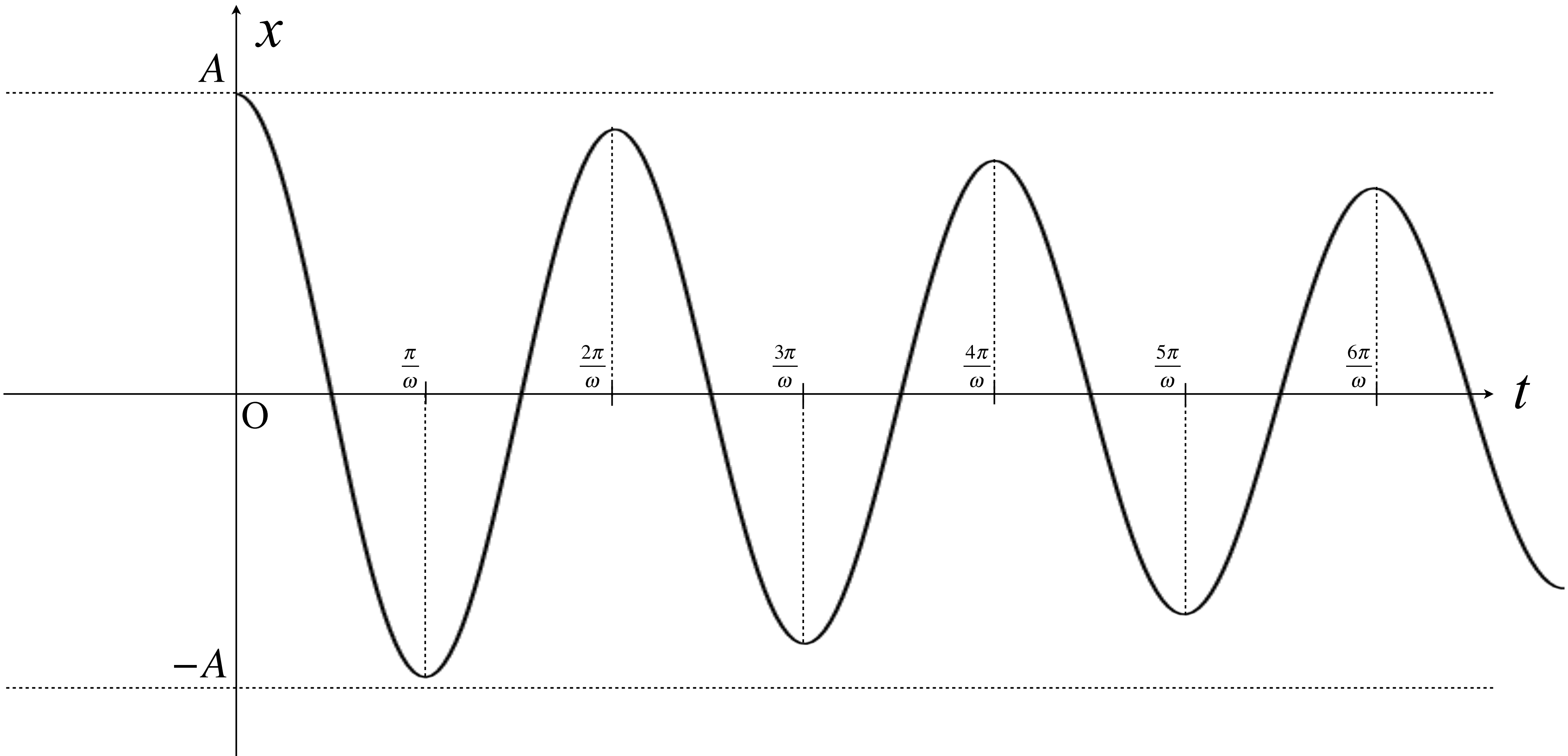
運動方程式を立ててみる ⑩

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma v = -kx - 2m\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

一般解を想像する ⑪

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0 \longrightarrow x(t)=$$



とりあえず代入してみると　⑫

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \longleftarrow x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$$

場合分けが必要

13

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(\omega^2-\gamma^2)y=0$$

正の場合

零の場合

負の場合

正の場合: $\omega > \gamma$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \underbrace{(\omega^2 - \gamma^2)}y = 0$$

$$p = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -p^2 y$$

$y(t)$ の一般解は,

$$y(t) =$$

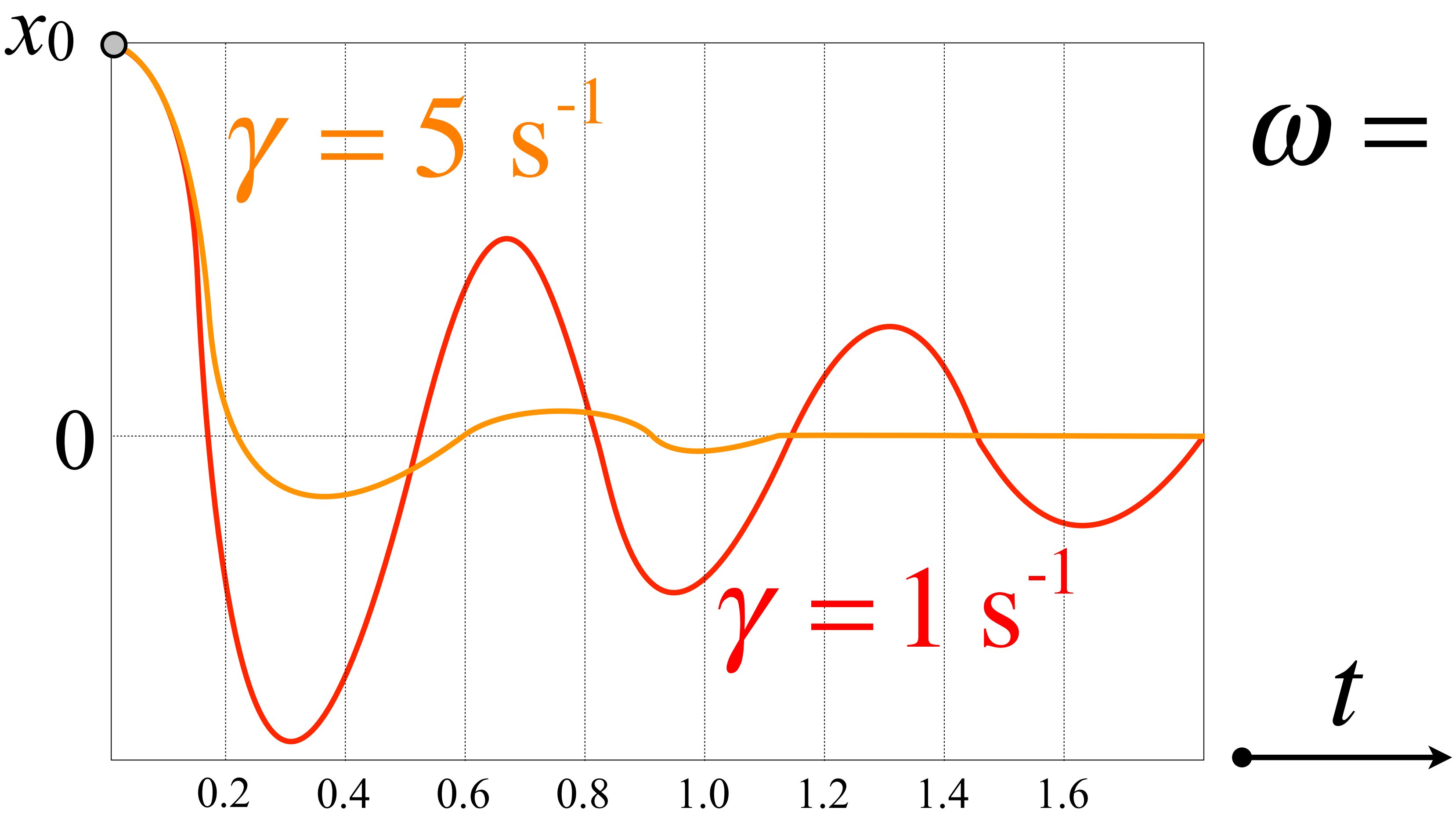
正の場合： $\omega > \gamma$

- $x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$ であることを考えると，

$$x(t) =$$

グラフで表現すると ⑯

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\,t + \theta_0)$$



$\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$

零の場合： $\omega = \gamma$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \underbrace{(\omega^2 - \gamma^2)}_{0} y = 0$$

$$0 \longrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$y(t)$ の一般解は,

$$y(t) =$$

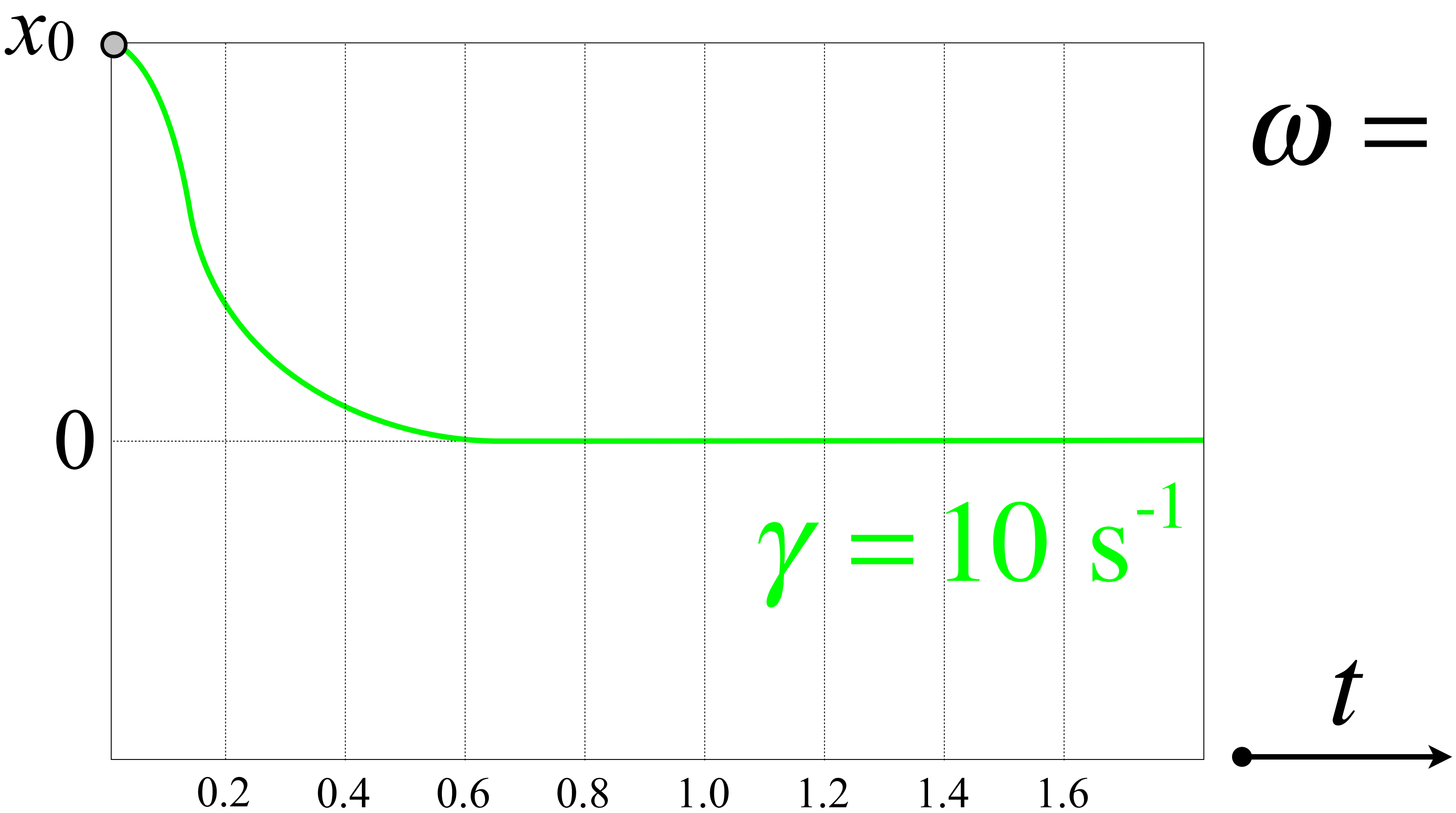
零の場合： $\omega = \gamma$ ⑱

- $x(t) = y(t)\ e^{-\gamma t}$ であることを考えると，

$$x(t) =$$

グラフで表現すると

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$



$\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$

負の場合：$\omega < \gamma$ ⑳

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - \gamma^2)y = 0$$

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = q^2 y$$

$y\,(t)$ の一般解は,

$$y(t) =$$

負の場合: $\omega < \gamma$ ㉑

- $x(t) = y(t)\, e^{-\gamma t}$ であることを考えると,

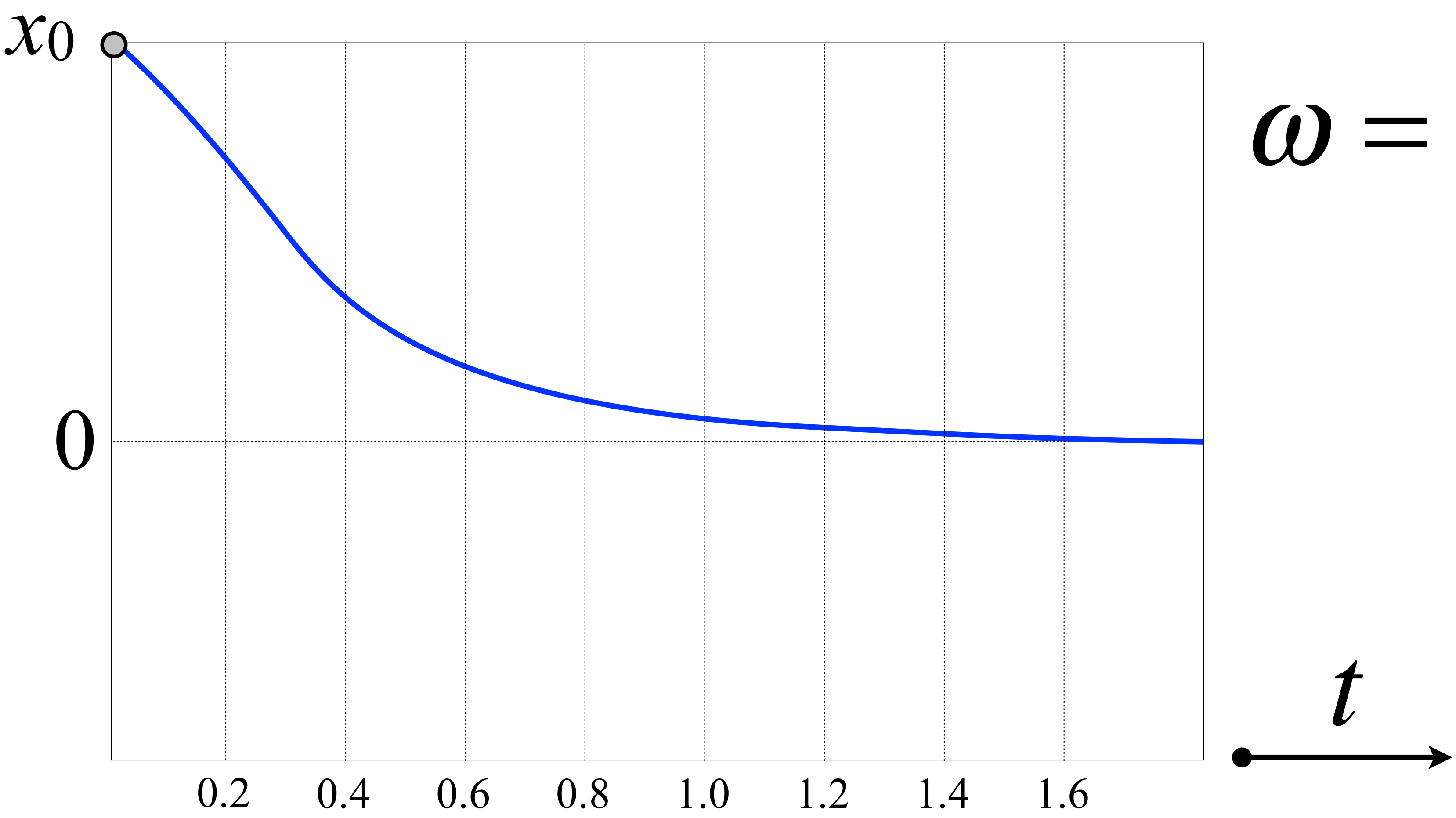
$$x(t) =$$

$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ であることを考えると,

$$\gamma - q > 0$$

グラフで表現すると

$$x(t) = Ae^{-(\gamma - q)t} + Be^{(\gamma - q)t}$$

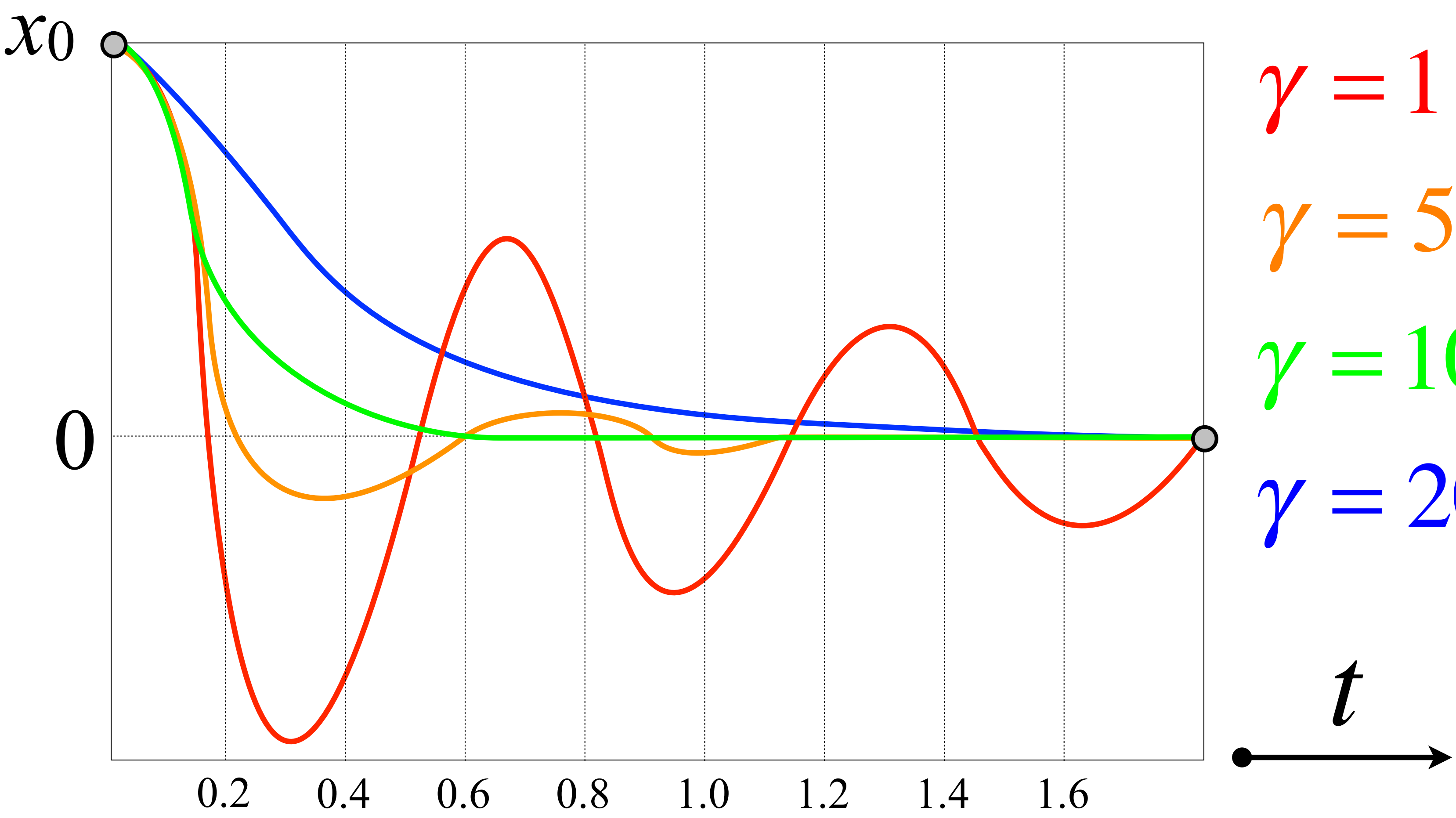


$$\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$$

全部重ね合わせると

減衰振動　臨界減衰　過減衰

$\omega = 10\ \mathrm{s^{-1}}$



$\gamma = 1\ \mathrm{s^{-1}}$

$\gamma = 5\ \mathrm{s^{-1}}$

$\gamma = 10\ \mathrm{s^{-1}}$

$\gamma = 20\ \mathrm{s^{-1}}$

実例 - ドアクローザ

- 空気ばねの復元力
- 油の粘性抵抗を利用した減衰装置により臨界減衰