

物理学概論第一

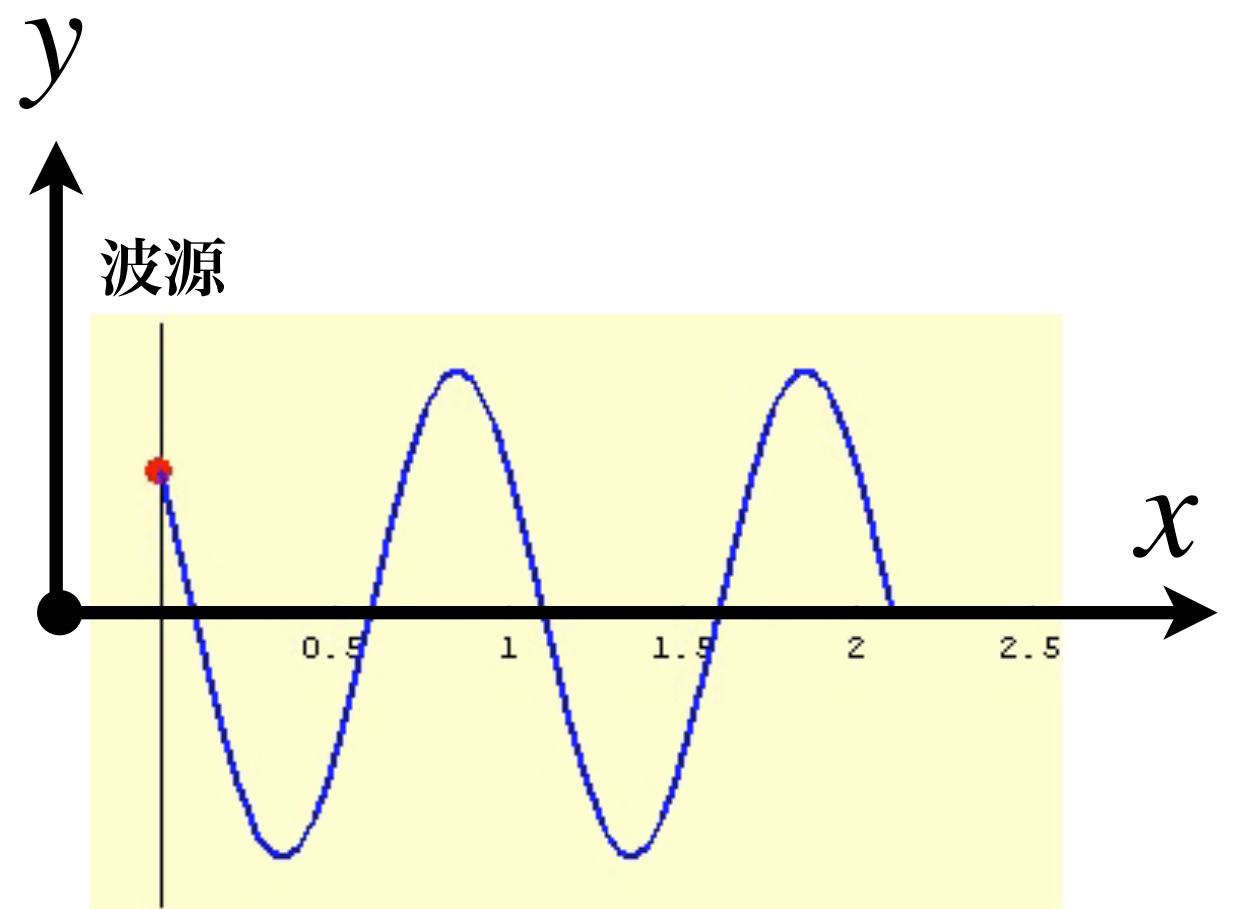


波動方程式とは？

②

- 波を伝える媒質の“ある部分”の運動方程式
- 波の**変位**を示す変数を $y = y(x, t)$ とすると以下で表現される

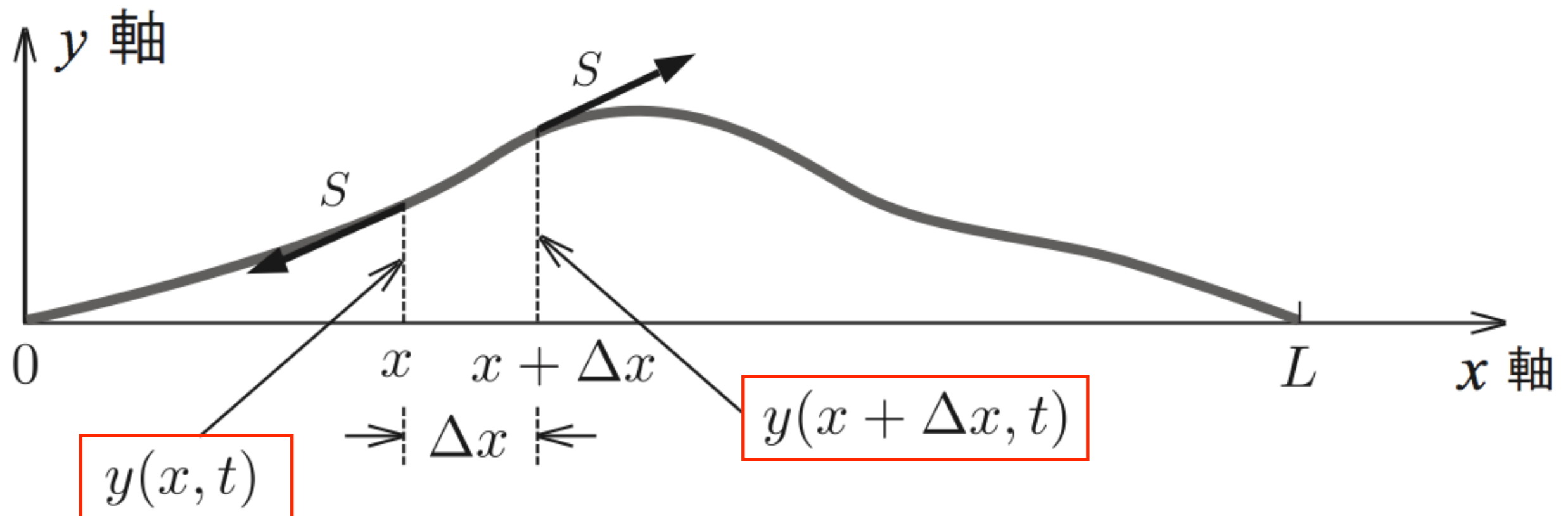
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



横波の波動方程式を導く

③

- 弦を伝わる“横波”の波動方程式を導く
- 弦は張力 S で張られており、線密度は μ

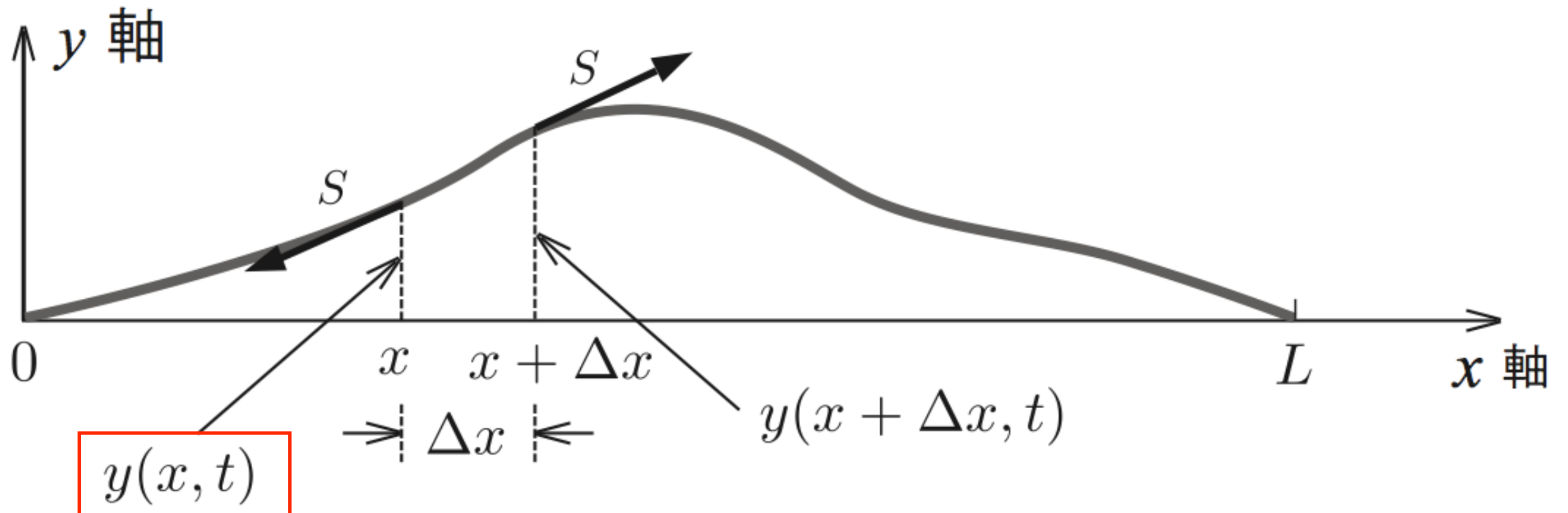


まずは加速度から

④

- $x = x$ のところでの y 方向の加速度は,

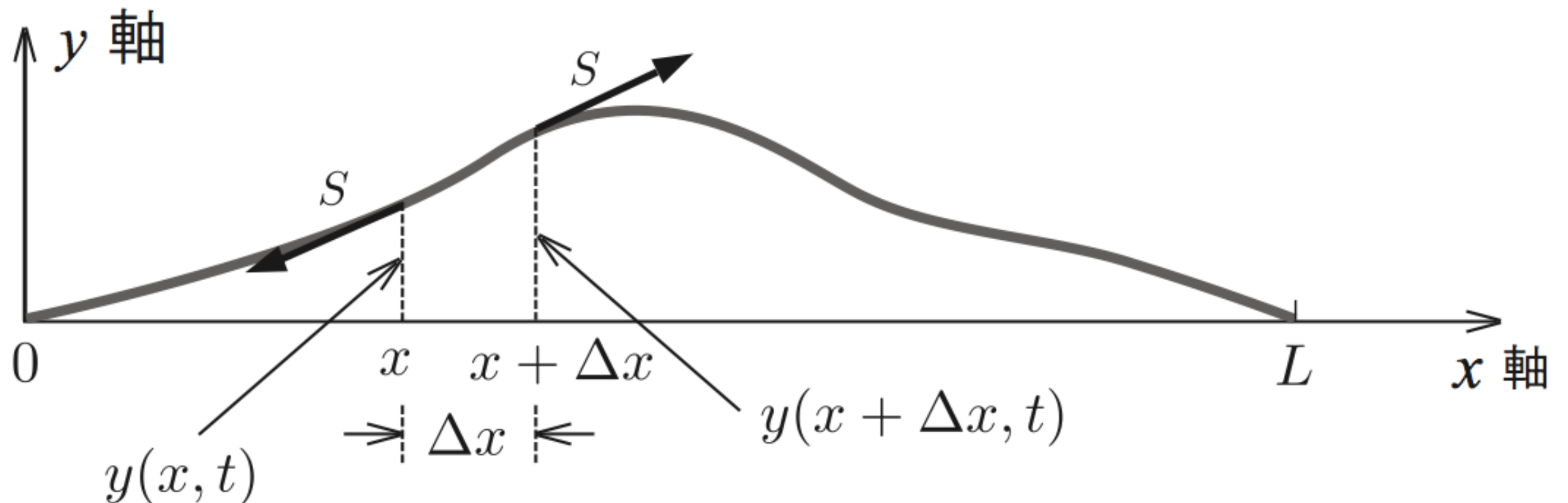
$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$



次に質量を考える

5

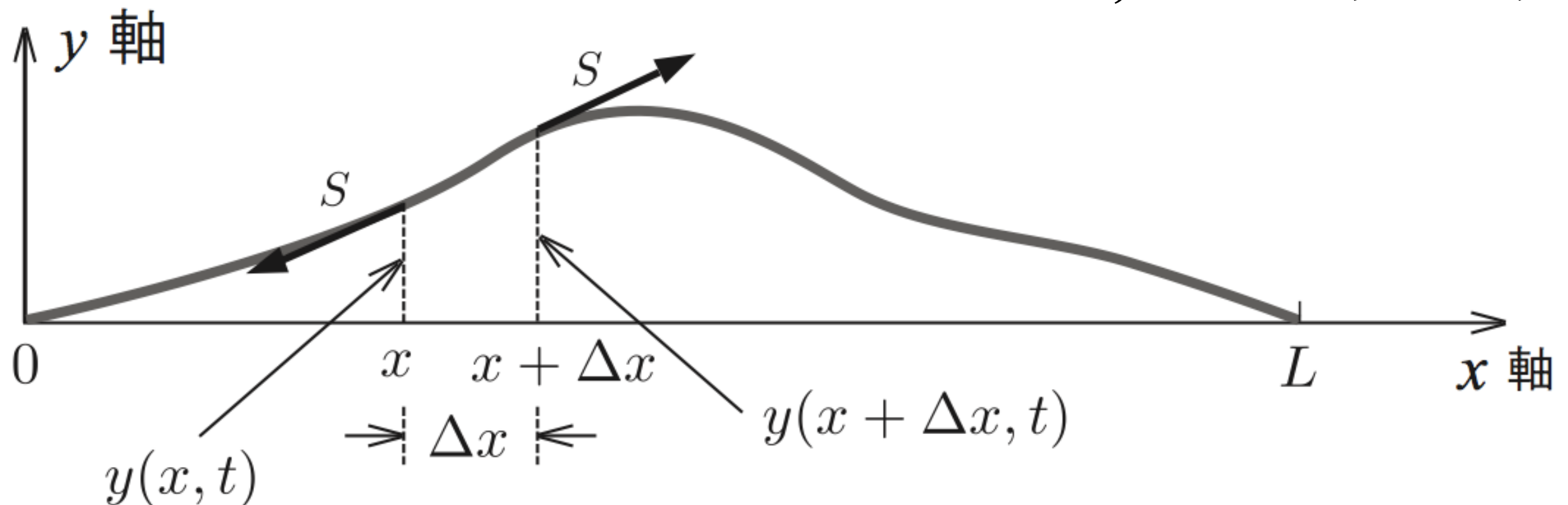
- $x = x$ から $x + \Delta x$ までの弦の一部の質量は $\mu \Delta x$ であることを考えると、質量×加速度に相当するのは:



x 方向にかかる力

⑥

- 弦の微小部分に作用する張力 S の x 成分は,
 $x = x$ で , $x = x + \Delta x$ で
 θ が微小で $\cos\theta = 1$ なのでそれぞれ,
− S , S : 釣り合う

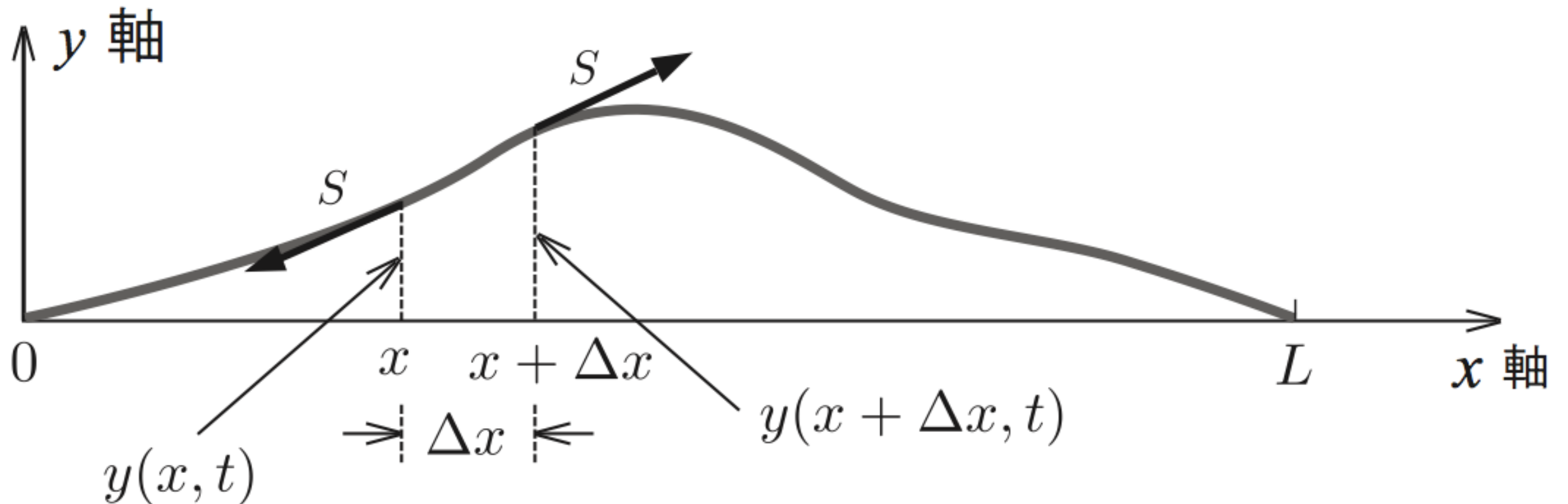


y 方向にかかる力

⑦

- 弦の微小部分に作用する張力 S の y 成分は,
 $x = x$ で , θ が微小なので

$$S_y = -S \sin \theta =$$

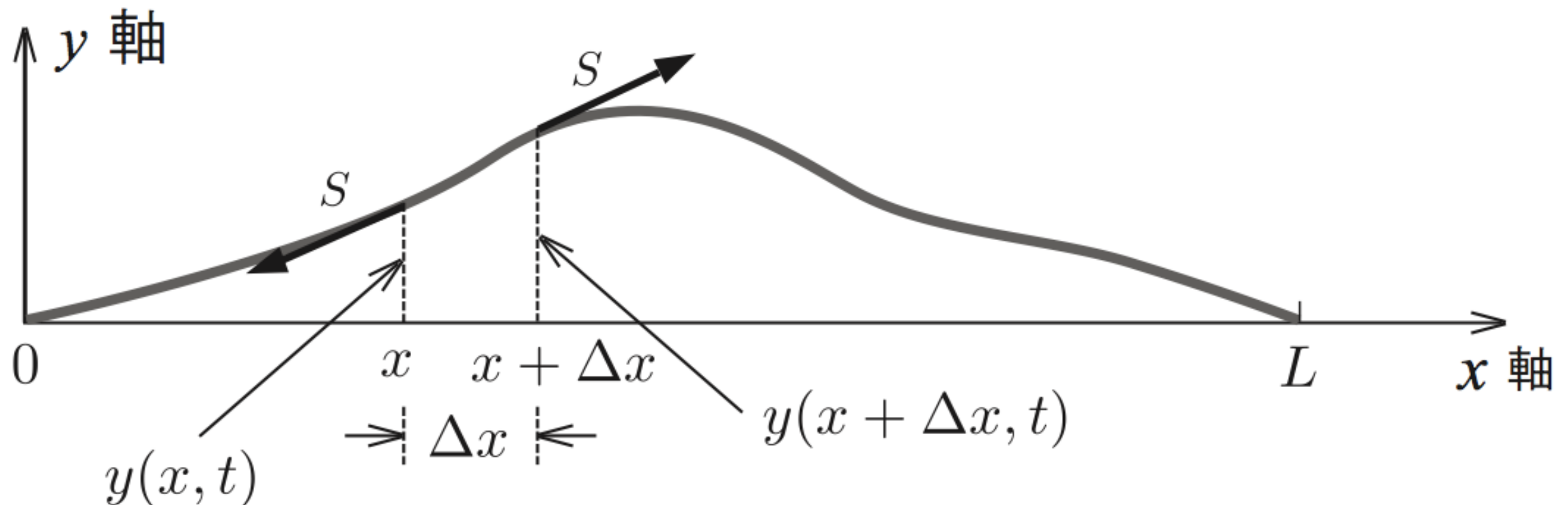


y 方向にかかる力

⑧

- 弦の微小部分に作用する張力 S の y 成分は,
 $x = x + \Delta x$ で , θ が微小なので

$$S_y = +S \sin \theta = +S \tan \theta =$$



y 方向にかかる力

⑨

- 弦の微小部分に作用する張力の総和 F は,

$$\begin{aligned} S \frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} - S \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} &= S \left(\frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \\ &= S \Delta x \frac{\frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}}{\Delta x} \end{aligned}$$

微分の定義そのもの

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}}{\Delta x} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow S \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

運動方程式はどうなるか？

10

- 弦の微小部分の運動方程式は

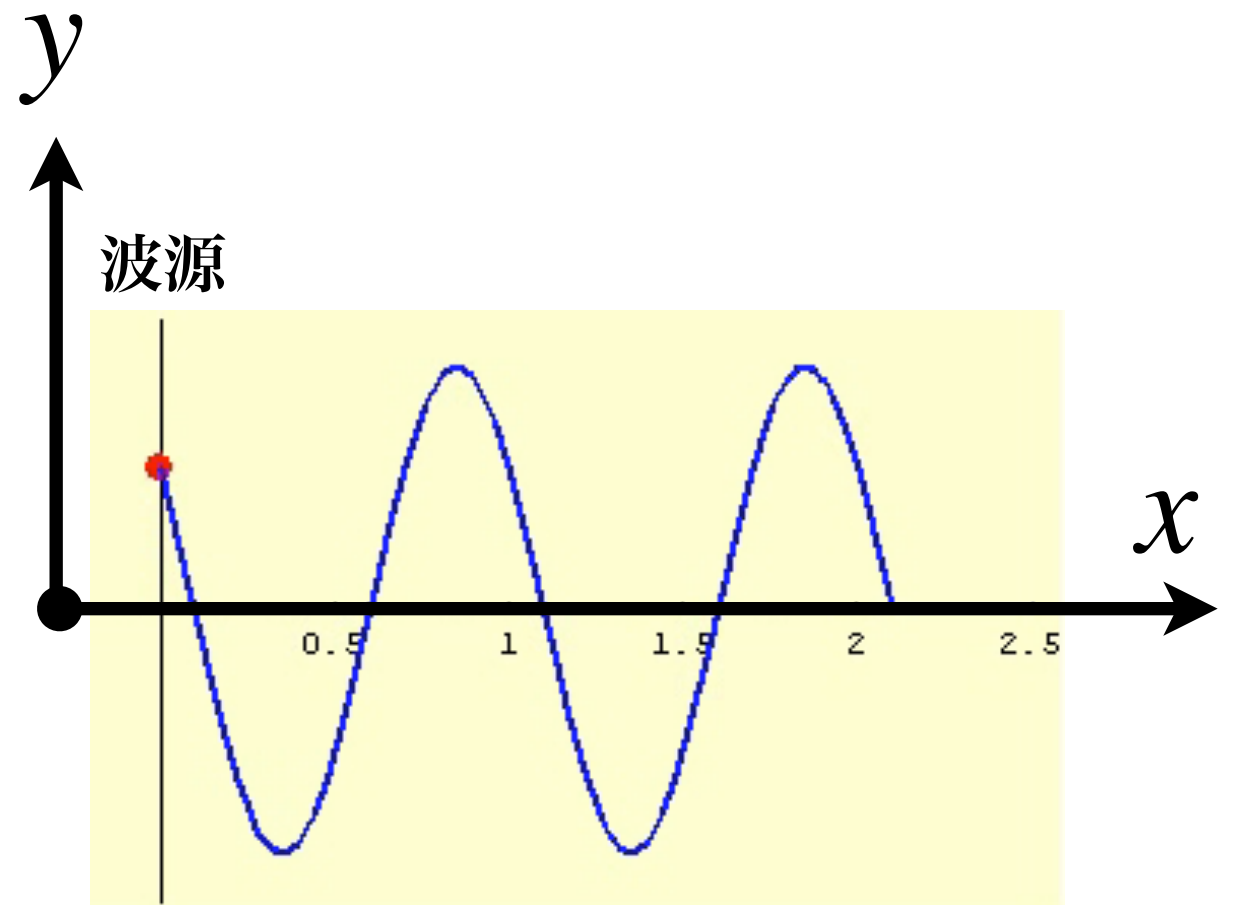
$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = S \Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

波動方程式とは？

11

- 波を伝える媒質のある部分の運動方程式
- 波の変位を示す変数を y とする $y = y(x, t)$
- 以下のような形

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



どんな解を持つか？

12

- 一般的な波の式は, 波動方程式を満たすか？

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

左辺に代入してみる

13

$$y(x,t) = A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

=

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

右辺に代入してみる

14

$$y(x,t) = A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

=

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

波動方程式の一般解

15

- 波動方程式の一般解は, f, g を任意の関数として以下のように表せる

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

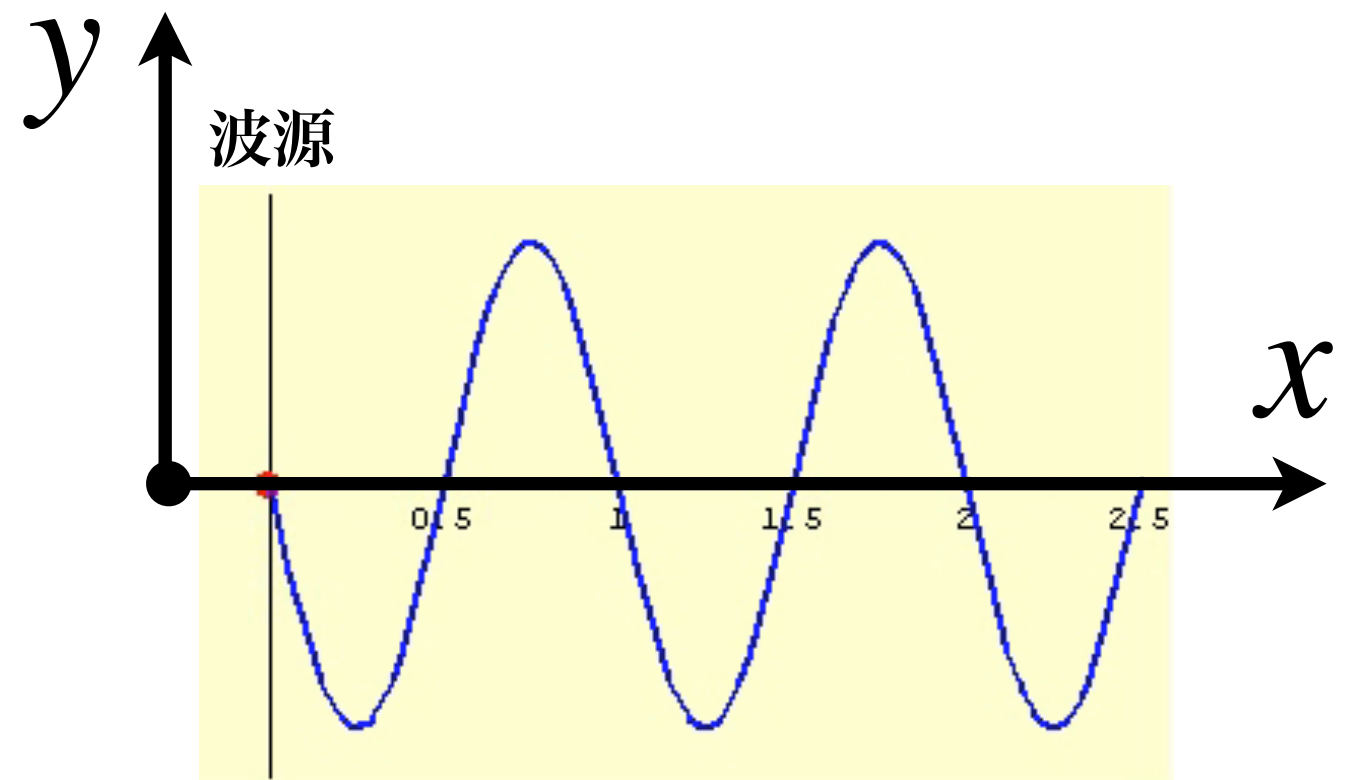
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

一般解の意味

16

- 波動方程式の一般解に $t = 0$ を入れてみる

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$



- 波の重ね合わせの原理

複数の波が同時に伝搬してきたときの媒質の変位は、それらの波が単独に伝搬してきたときの媒質の変位を合成したものになる

- つまり、2つの波 y_1, y_2 が波動方程式の解である場合、2つを合成した y も解である

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

波の重ね合わせと波動方程式

18

- 波動方程式

$y = f(\underline{x - vt})$ は波動方程式を満たすか？

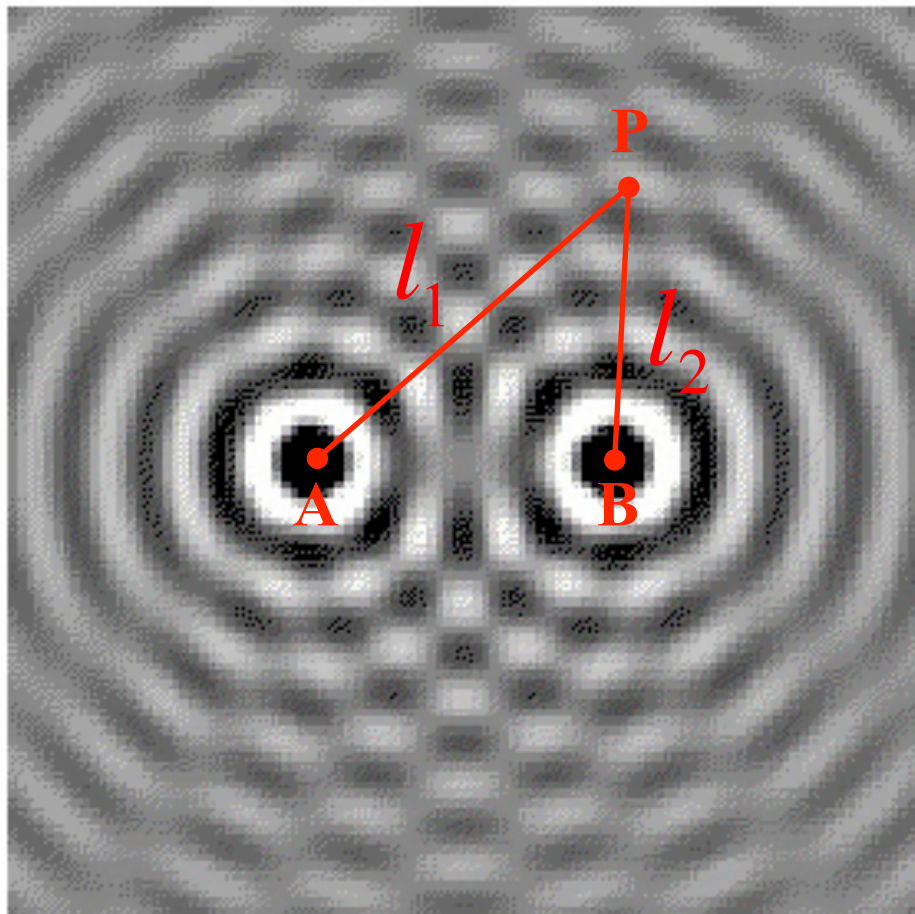
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$y = g(\underline{x + vt})$ は波動方程式を満たすか？

2つの波の重ね合わせ:

$y = f(\underline{x - vt}) + g(\underline{x + vt})$ は波動方程式を満たすか？

- 波の干渉: 2 つ以上の波が出会うとき, 合成波はそれらの波を重ね合わせたものになり, 強め合ったり, 弱め合ったりすること



強め合う条件 (山と山, 谷と谷)

打ち消し合う条件 (山と谷など)

縦波の波動方程式

20

- 弾性体の棒を伝わる縦波の波動方程式を導く

密度 ρ , 断面積 A

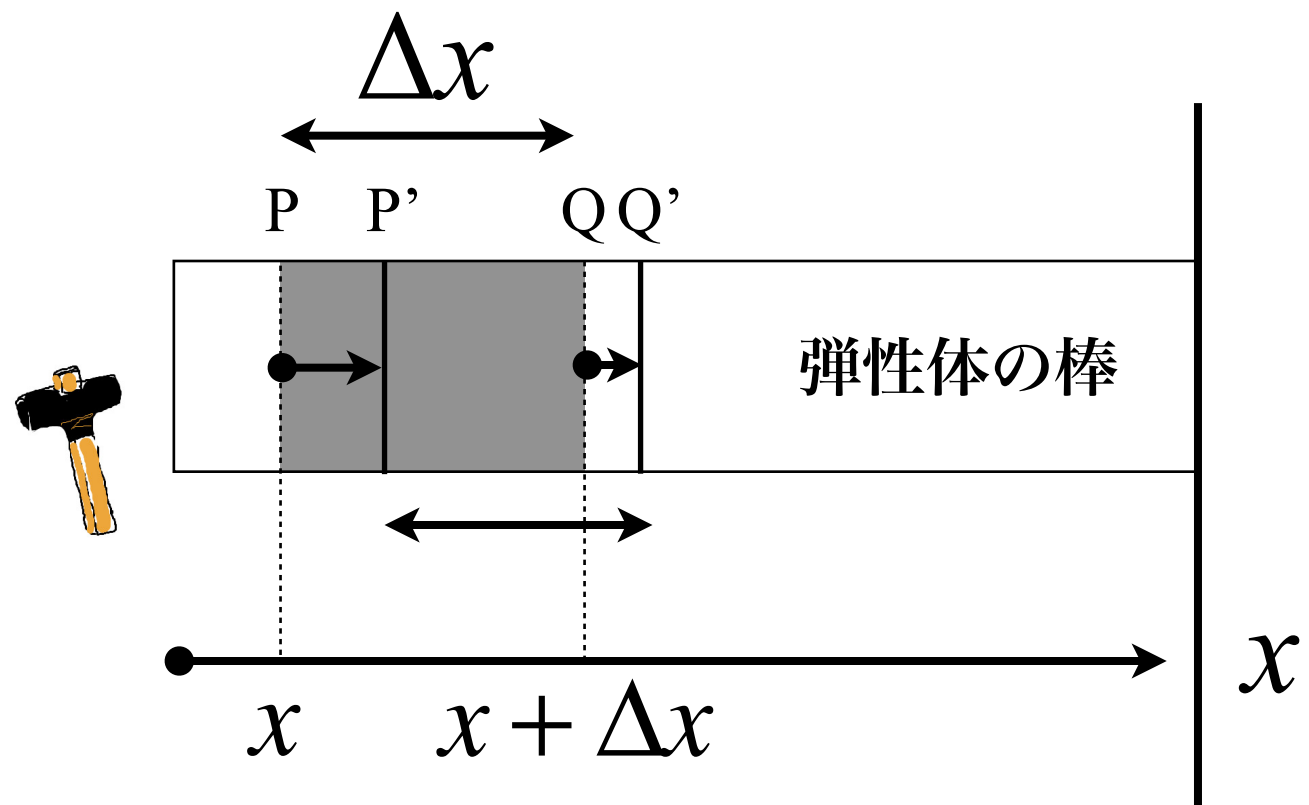
波の x 方向の変位を $u(x, t)$ とすると,

P 点の変位は, $u(x, t)$

Q 点の変位は,

$$u(x + \Delta x, t)$$

$$\simeq u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$



棒の伸び ΔL を考える

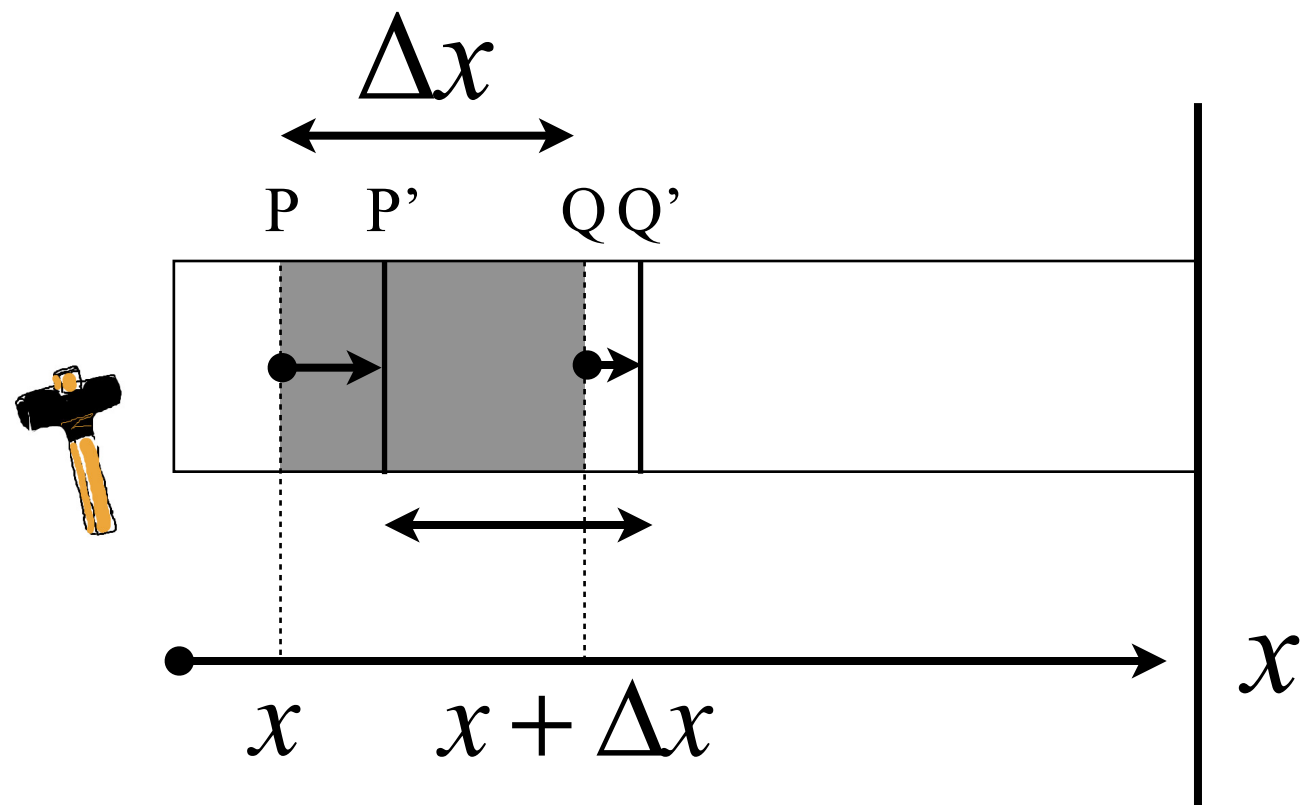
21

- PQ 部分の伸び ΔL は以下のように表せる

$$\Delta L = u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$$

$$= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - u(x, t)$$

$$= \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$



応力とヤング率

22

- $P(x=x)$ に働く弾性力 F は,

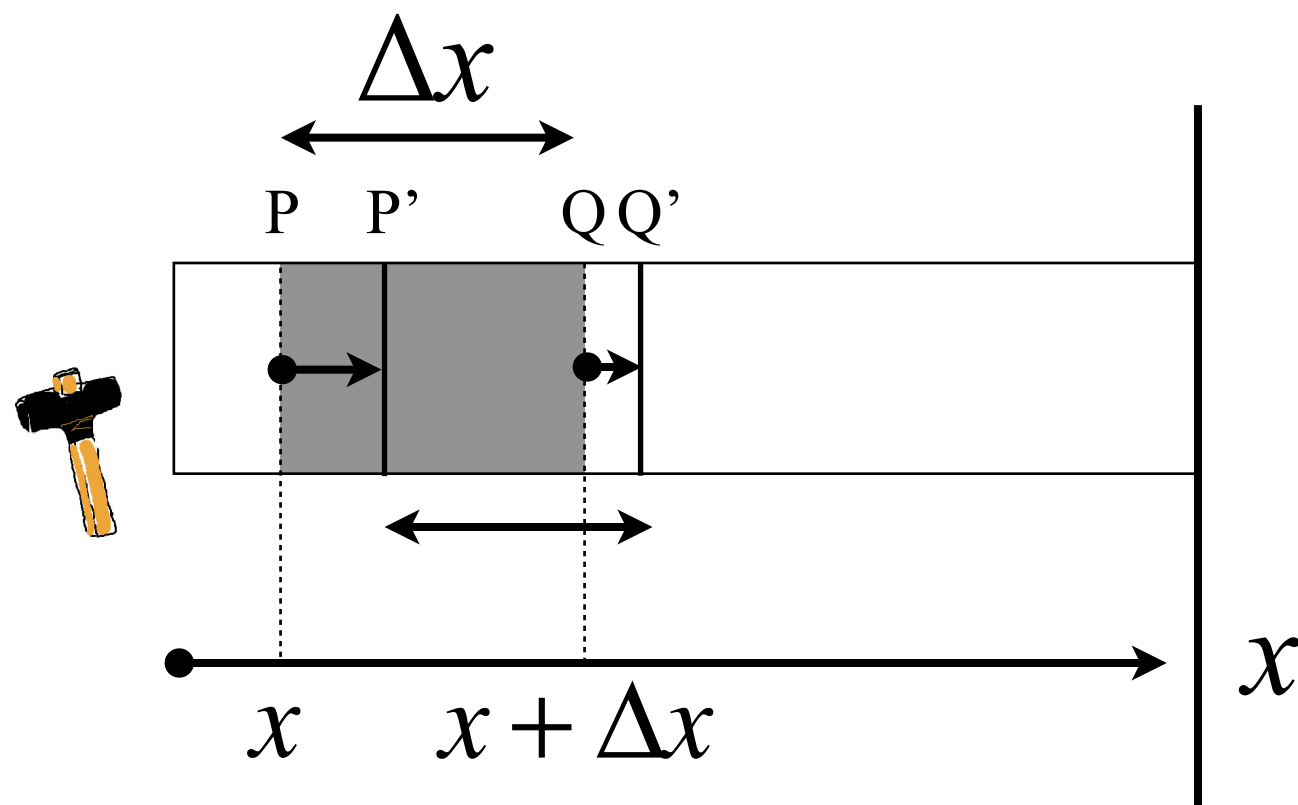
$$F = AE \frac{\Delta L}{L} = AE \frac{\Delta x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x} = AE \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

E はヤング率

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

伸び

弾性体の長さ



縦波の波動方程式

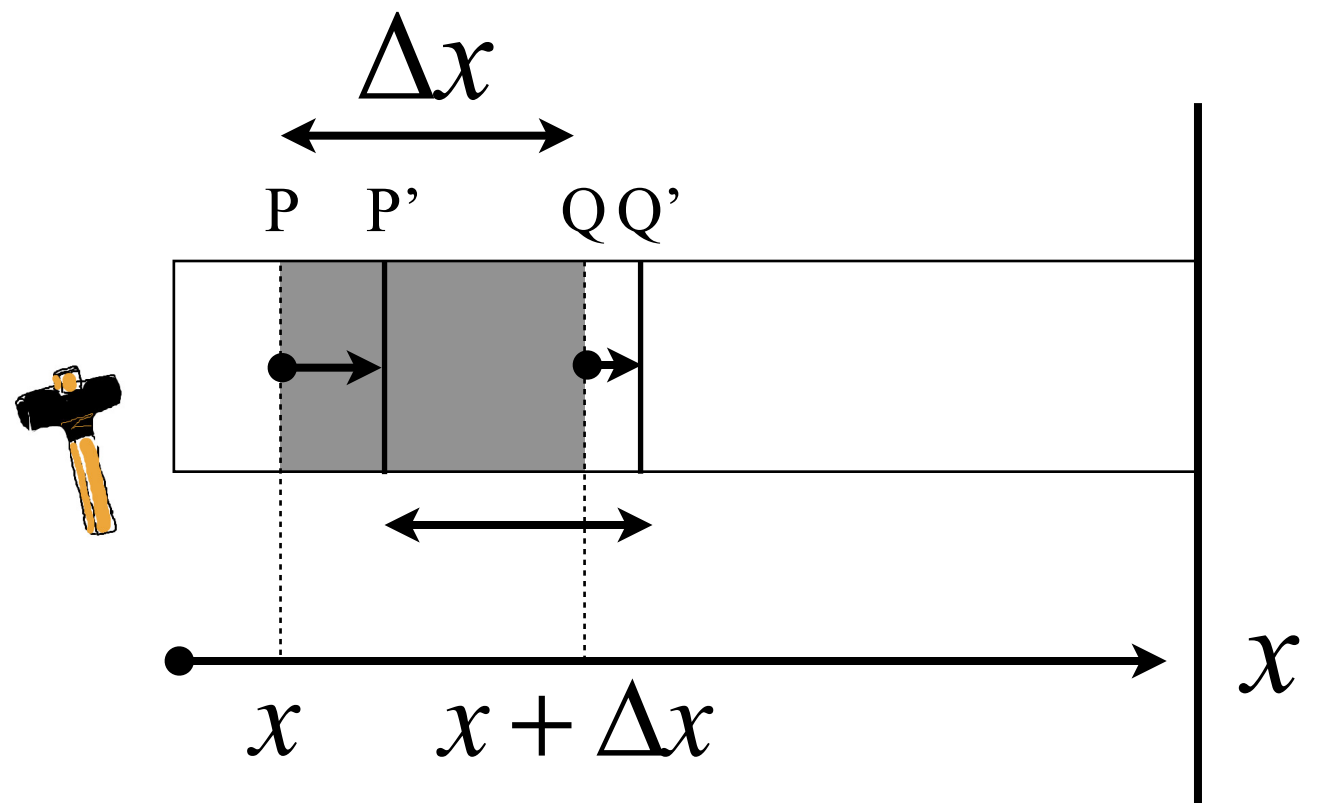
23

- PQ 部分の運動方程式は,

$$\rho \Delta x A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = AE \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = AE \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

● → $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

波の速さ
 $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$



縦波も横波も同じ形

24

- 弦を伝わる横波の波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{波の速さ} \quad v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- 棒を伝わる縦波の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{波の速さ} \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$